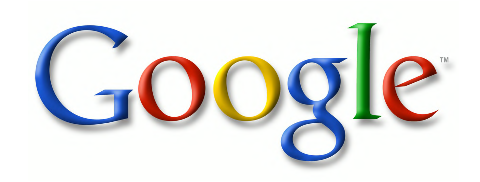
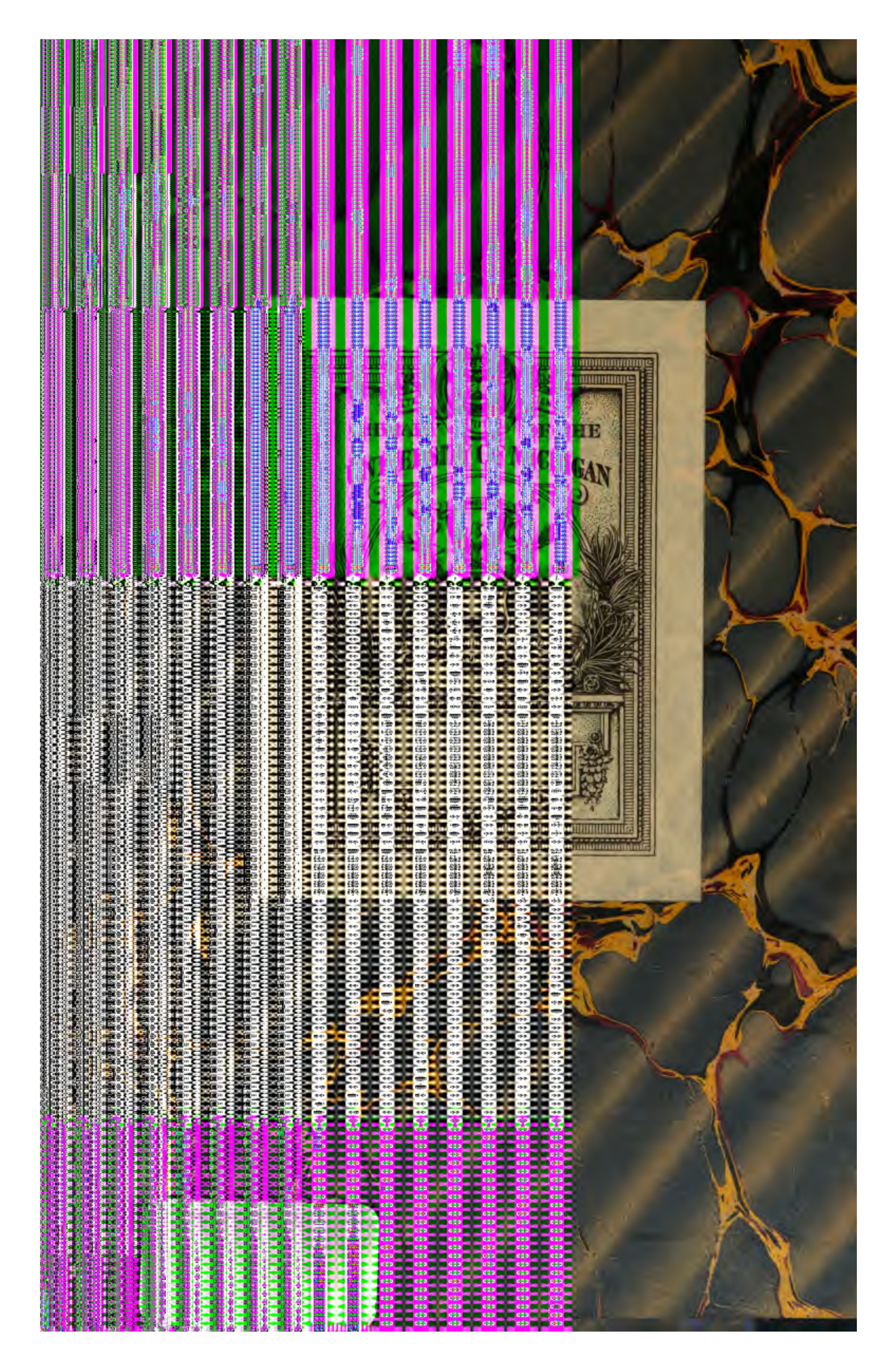
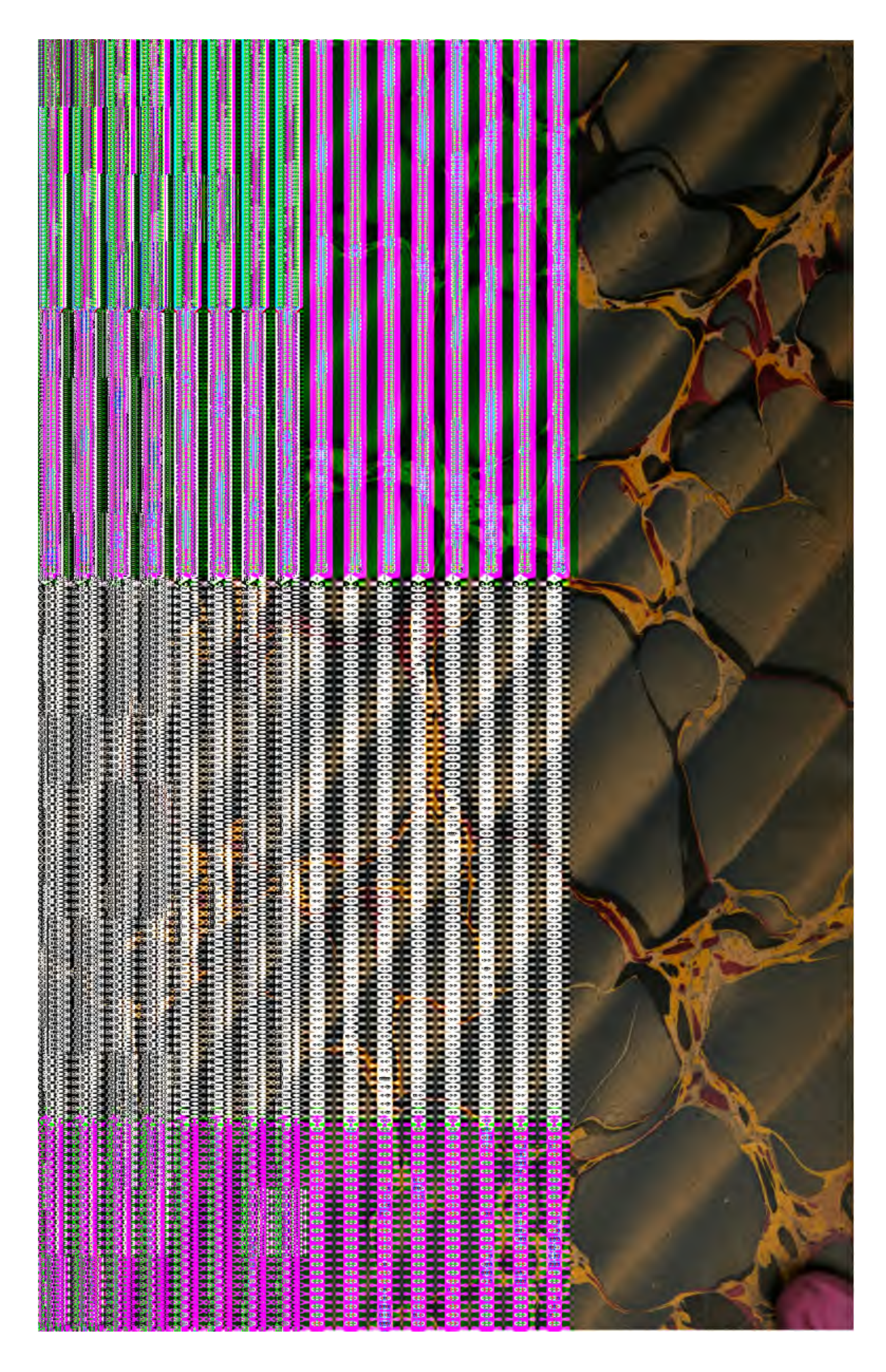
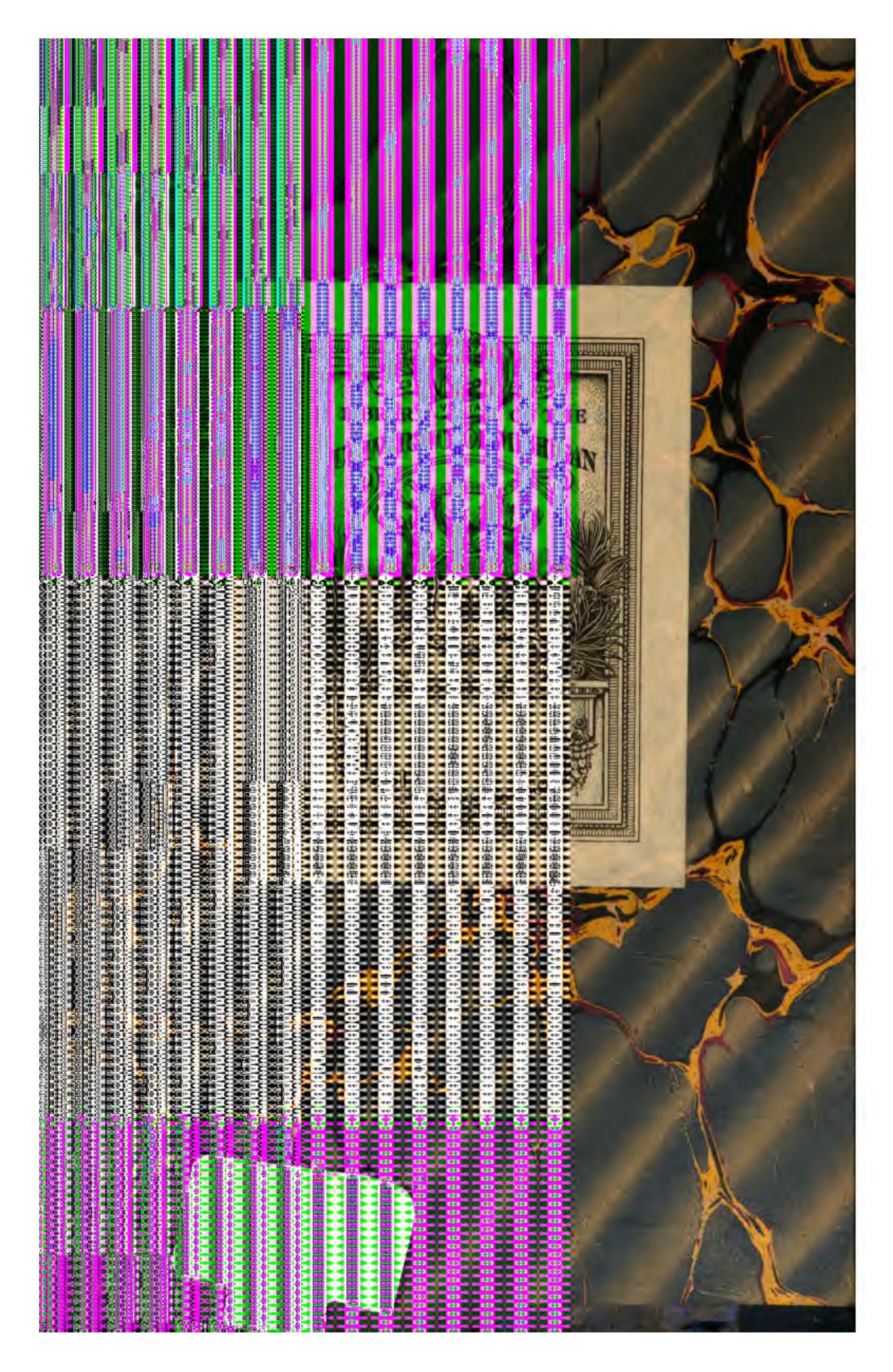
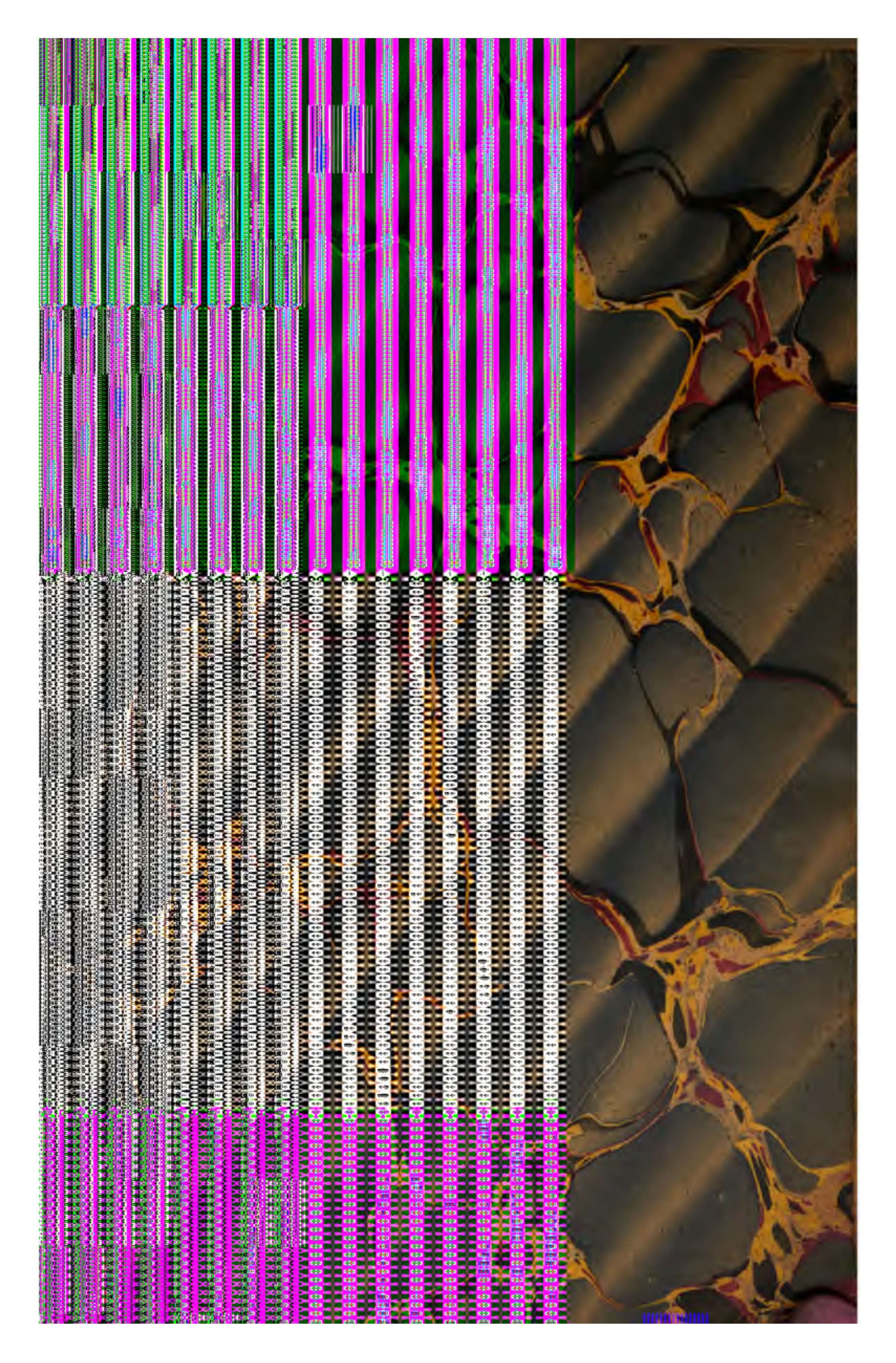
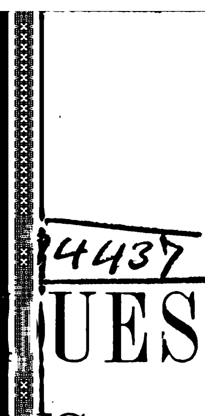












...UES

...ES

...VERNEMENT

...IENCES

...E SAINT-LOUIS

...AVE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 265.)

XXIX. — Des centres isodynamiques V, W et de leurs transformés v, w.

Nous définirons les centres isodynamiques par la condition que leurs distances à A, B, C sont inversement proportionnelles à a, b, c. Ils sont conjugués, c'est-à-dire en ligne droite avec O, d'un même côté de O et à des distances telles que

$$OV.OW = R^2.$$

Nous supposons que V désigne celui qui est le plus rapproché du point O; ce sera le premier centre isodynamique.

D'après cette définition, les centres isodynamiques s'obtiennent par l'intersection de deux quelconques des trois cercles d'Apollonius, relatifs au triangle ABC.

1° *Les centres isodynamiques ont pour transformés* v, w *les sommets des deux triangles équilatéraux construits sur* BC, v *étant à l'opposé de* A.

Les égalités $a.AV = b.BV = c.CV$ se transforment en

$$\frac{a}{Av} = \frac{b.Cv}{b.Av} = \frac{c.Bv}{c.Av},$$

d'où

$$Cv = Bv = a;$$

et, de même,

$$Cw = Bw = a.$$

D'ailleurs V et W étant conjugués,

$$\frac{OV}{R} = \frac{AV}{AW} = \frac{Aw}{Av};$$

et, comme $OV < R$, il suit $Aw < Av$. Donc v est le sommet du triangle équilatéral extérieur.

Remarque. — Au moyen de v et w on obtient une construction facile de V et W.

2° Coordonnées tripolaires absolues de V *et* W; *puissances de ces points, relativement à la circonférence* ABC, *et relation remarquable concernant la distance* VW.

On a évidemment

$$\overline{Av}^2 + \overline{Aw}^2 = 2m^2 + \frac{3a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\overline{Av}^2 - \overline{Aw}^2 = 2ah\sqrt{3} = 4S\sqrt{3};$$

d'où

$$\overline{Av}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3},$$

$$\overline{Aw}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3}.$$

Par suite, les coordonnées tripolaires :

$$AV = \frac{bc}{Av}, \qquad AW = \frac{bc}{Aw}.$$

La puissance V_0 de V, relativement à ABC, résulte de l'égalité

$$\frac{OV}{R} = \frac{Aw}{Av}.$$

On en tire

$$-\frac{V_0}{R^2} = \frac{Av^2 - Aw^2}{Av^2} = \frac{4S\sqrt{3}}{Av^2},$$

ou

$$V_0 = -\frac{abc.R\sqrt{3}}{Av^2};$$

ou, sous une autre forme,

$$-\frac{4V_0S}{\sqrt{3}} = a^2\overline{AV}^2 = b^2\overline{BV}^2 = c^2\overline{CV}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}}.$$

On trouve de même, $W_0 = \dfrac{abc.R\sqrt{3}}{Aw^2}$.

On arrive plus promptement à ces résultats par la formule générale du § XXIII $M_0 = \dfrac{2R\overline{AM}^2}{bc}.x$. Ici x est la première coordonnée normale de v ou de w, c'est-à-dire

$$\frac{-a\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{+a\sqrt{3}}{2};$$

et l'on a $$V_0 = -\frac{Ra\sqrt{3}}{bc}.AV^2,$$

ou $$V_0 = -\frac{abc.R\sqrt{3}}{Av^2} \quad \text{et} \quad W_0 = \frac{abc.R\sqrt{3}}{Aw^2}.$$

La relation à signaler entre la distance VW des deux centres isodynamiques et la distance $\omega\omega'$ des transformés des deux points de Brocard est $VW.\omega\omega' = a^2\sqrt{3}$.

En effet, $VW = \dfrac{vw.bc}{Av.Aw}$. Or $vw = a\sqrt{3}$, et les valeurs trouvées pour Av et Aw donnent

$$Av.Aw = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2};$$

d'où $$VW = \frac{abc\sqrt{3}}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}}.$$

Et l'on a vu (§ XXVII, 3°) que

$$\omega\omega' = \frac{a}{bc}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}.$$

On a ainsi $$VW.\omega\omega' = a^2\sqrt{3}.$$

On remarquera encore que, AI étant la distance de A au diamètre du cercle de Brocard, $\dfrac{VW}{2AI} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{b^2 - c^2}$ (§ XXVII, 5°). Cette distance AI est d'ailleurs aussi la distance de A à VW, comme il résulte de 4°.

3° Coordonnées angulaires et coordonnées normales de V *et* W.

Les coordonnées angulaires de V sont $A + \frac{\pi}{3}$, $B + \frac{\pi}{3}$, $C + \frac{\pi}{3}$, puisque les angles du triangle vBC sont $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$. Et les coordonnées angulaires de W sont $A - \frac{\pi}{3}$, $B - \frac{\pi}{3}$, $C - \frac{\pi}{3}$, car les angles de wBC sont $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$. (Remarquer que les signes attribués aux angles vBC ou wBC exigent que le sens ABC soit pris pour sens des angles positifs.)

De là, pour les coordonnées normales X, Y, Z de V:

$$V_0=aX\left[\cot g\left(A+\frac{\pi}{3}\right)-\cot g A\right]=bY\left[\cot g\left(B+\frac{\pi}{3}\right)-\cot g B\right)$$
$$=CZ\left[\cot g\left(C+\frac{\pi}{3}\right)-\cot g C\right].$$

Afin d'introduire, sans ambiguïté, les sinus et les cosinus, nous supposerons que l'on prenne pour A, B, C les plus petites valeurs positives de ces angles, ce qui, le sens positif des angles étant le sens de rotation ABC, revient à considérer ces angles en valeurs absolues, comme dans la Géométrie ordinaire. On obtient ainsi

$$\frac{-V_0}{R\sqrt{3}}=\frac{X}{\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{Y}{\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{Z}{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{abc}{Av^2}.$$

De même, pour les coordonnées normales X_1, Y_1, Z_1, du point W:

$$\frac{W_0}{R\sqrt{3}}=\frac{X_1}{\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{Y_1}{\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{Z_1}{\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{abc}{Aw^2}.$$

Quant aux coordonnées normales des points v, w, elles sont évidentes :

pour v,

$$x=-\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad y=a\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right),\quad z=a\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right);$$

pour w,

$$x_1=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad y_1=a\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\quad z_1=a\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right).$$

4° *Les points* v, w *sont situés sur la civconférence* α, *transformée de la droite* OG′, *et ils sont conjugués relativememt à la circonférence transformée du cercle de Brocard. Les centres isodynamiques* V, W *sont situés sur* OG′ *et divisent* OG′ *harmoniquement.*

Il suffit d'établir la première partie du théorème, la seconde en résultant par inversion.

La circonférence α est la circonférence AA′g qui a son centre en α, sur BC. La puissance de D, milieu de BC, rela-

tivement à cette circonférence, est

$$DA.Dg' = 3DA.D\Delta = 3DB.DC = -\frac{3a^2}{4} = -Dv^2.$$

Donc la perpendiculaire en D, à BC, rencontre cette circonférence en v et w.

De plus, v et w sont conjugués relativement au cercle $A'A_1g'$, transformé du cercle de Brocard, car la droite vw perpendiculaire à $A'A_1$ en son milieu, passe par le centre de ce cercle; et comme, d'après ce qui précède, $Dg'.DA_1 = Dv^2$, le cercle $A'A_1g'$ est orthogonal au cercle décrit sur vw comme diamètre, et par conséquent divise vw harmoniquement ; donc v, w sont conjugués relativement à ce cercle.

Corollaire. — De la double propriété qu'ont les points V,W d'être conjugués relativement au cercle ABC et relativement au cercle de Brocard résulte cette construction : *Par le point de Lemoine* G', *on trace dans le cercle* ABC, *une corde* LL' *perpendiculaire à* OG'; *le cercle orthogonal au cercle* ABC *en* L *et* L' *coupe* OG' *aux points* V,W.

D'autres propriétés concernant ces points se rattachent aux propriétés des centres isogones et seront établies dans le paragraphe suivant.

(A suivre.)

THÉORÈME (*) SUR L'ELLIPSE

Par M. **Vazou.**

D'un point M, *pris sur l'un des diamètres conjugués égaux d'une ellipse* Γ, *on mène, les tangentes* MA, MB. *La circonférence* Δ, *circonscrite au triangle* MAB *passe par le centre* O *de* Γ.

On a d'abord

(1) $$OI \times IM = \overline{AI}^2,$$

ou

(2) $$OI.OM - \overline{OI}^2 = \overline{AI}^2.$$

(*) Ce théorème est tiré de l'exercice 61, proposé dans le numéro de Novembre dernier du *J. S.*

D'autre part, AB étant la polaire du point M, on a

(3) $$\overline{OE}^2 = OI.OM.$$

Comparant (2) et (3), on a

$$\overline{OE}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{AI}^2,$$

ou $$(OE + OI)(OE - OI) = \overline{AI}^2,$$

$$IF.IE = \overline{AI}^2.$$

Mais si OD désigne le diamètre conjugué de OE, diamètre qui est parallèle à AB, une propriété connue donne

$$\frac{\overline{AI}^2}{IF.IE} = \frac{\overline{OD}^2}{\overline{OE}^2};$$

d'où

$$OD = OE.$$

OD, OE sont donc les diamètres conjugués égaux; le théorème se trouve ainsi démontré.

Autrement. — Prenons un point M sur l'un des diamètres conjugués de l'ellipse; ayant mené les tangentes MA, MB, il faut montrer que le quadrilatère MABO est inscriptible.

On a $$\overline{OE}^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = OI.OM;$$

nous appliquons ici: 1° le théorème d'Apollonius; 2° la relation harmonique des quatre points M, I, E, F.

Cette égalité prouve que

$$OI(OI + MI) = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

d'où (4) $$OI.MI = \frac{a^2 + b^2}{2} - \overline{OI}^2,$$

Mais

(5) $$\frac{\overline{AI}^2}{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{\overline{OI}^2}{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 1.$$

La comparaison des égalités (4), (5) prouve que

$$\overline{AI}^2 = OI.MI.$$

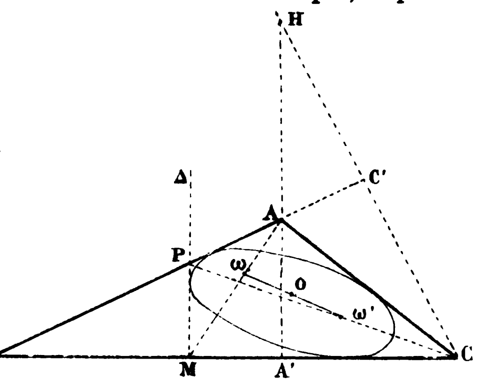
SUR LE CERCLE DE MONGE

Par M. **Ch. Michel**, élève au Collège Chaptal.

Proposons-nous de démontrer géométriquement le théorème bien connu :

Le cercle de Monge, d'une conique inscrite à un triangle, est orthogonal au cercle conjugué.

Soit Δ une tangente à la conique, perpendiculaire en M à BC, rencontrant AB en P. Le centre O de la conique, d'après le théorème de Newton, est sur la médiane ωω′ du quadrilatère circonscrit ainsi formé.



Imaginons les circonférences δ, δ′, décrites sur AM et CP comme diamètres. La première passe par le pied A′ de la hauteur issue de A, la seconde par le pied C′ de la hauteur issue de C; les puissances de l'orthocentre H, par rapport à ces cercles, sont donc respectivement,

$$HA.HA', \qquad HC.HC'.$$

Ces deux puissances sont égales. Le point H est donc un point de l'axe radical des deux cercles δ, δ′; et HM est perpendiculaire à ωω′ en un point I. On a, par suite, la relation

$$\overline{OH}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{\omega H}^2 - \overline{\omega M}^2.$$

$\overline{\omega H}^2 - \overline{\omega M}^2$ représente la puissance de H par rapport au cercle ω; c'est-à-dire HA.HA′. Or, d'après des propriétés connues, HA.HA′ représente le carré du rayon ρ du cercle conjugué. On a donc

$$\overline{OH}^2 = \overline{OM}^2 + \rho^2.$$

En observant que H est le centre du cercle conjugué, on voit que cette relation établit le théorème énoncé.

GÉNÉRALISATION ET EXTENSION DU PROBLÈME DES AIGUILLES D'UNE MONTRE

Par M. J. Colette, ancien répétiteur de Mathématiques.

Ce problème, que les cours d'arithmétique et d'algèbre élémentaires résument en quelques lignes, est susceptible de développements qui ne seront peut-être pas inutiles aux élèves de ces cours. La présente Note a pour but de résumer le cas général, ainsi que quelques cas particuliers intéressants (*).

Les données, très simples, de la question sont les suivantes: 1° A midi l'aiguille des heures et celle des minutes coïncident; 2° l'aiguille des heures parcourt le cadran tout entier en 12 heures; et l'aiguille des minutes parcourt le cadran tout entier pendant que celle des heures parcourt le douzième du cadran, soit une heure; 3° nous prenons pour *unité* l'heure, c'est-à-dire le nombre 12. Quant aux angles que peuvent faire entre elles les directions des deux aiguilles, on comprend qu'il est facile de les mesurer par tous les nombres de 1 à 12; ces arcs comprendront des heures, minutes et secondes, etc., qui seront évalués avec une approximation aussi grande qu'on le voudra. Il suit d'ailleurs de ce qui précède que les aiguilles coïncideront lorsque la différence des arcs parcourus sera un multiple quelconque de 12.

Ces préliminaires étant posés, et les deux aiguilles étant sur 12 heures ou midi, voyons les heures où auront lieu les prochaines rencontres ou coïncidences:

La petite aiguille décrivant x (arc, angle ou heure) la grande décrit $12x$, la différence de ces arcs est évidemment $12x - x$

(*) Tous les cas possibles sont, d'ailleurs, très faciles à vérifier *expérimentalement* sur une montre à remontoir, où le mouvement des aiguilles peut être rendu indépendant du mécanisme, et se produire dans les deux sens, en avant comme en arrière.

qui équivaut à 12, pour la prochaine rencontre; on a donc :

$$12x - x = 12.$$

Si l'on suppose que la grande aiguille fasse ensuite un deuxième, troisième, et en général un n^e tour du cadran, il y aura toujours coïncidence. L'équation générale est donc

$$(1) \qquad 12x - x = n \times 12, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{n \times 12}{11},$$

n pouvant prendre toutes les valeurs 1, 2, 3 ... 10, 11.

Les heures de rencontre sont donc

$$(2) \qquad \frac{12}{11} \quad \frac{24}{11} \quad \frac{36}{11} \quad \frac{48}{11} \quad \frac{60}{11} \quad \frac{72}{11} \quad \frac{84}{11} \quad \frac{96}{11} \quad \frac{108}{11} \quad \frac{120}{11} \quad \frac{132}{11}$$

Remarque importante. — Si au lieu du mouvement ordinaire et direct des aiguilles *vers la droite*, on suppose que ce mouvement s'accomplit en sens inverse, c'est-à-dire de la droite vers la gauche, nous devrons, conformément aux principes, donner aux angles décrits le signe négatif.

Nous aurons alors $-12x + x = n \times 12$ d'où

$$12x - x = -n \times 12.$$

d'où une suite de solutions semblables à la suite (1) mais de signes contraires.

Il est, du reste, inutile de s'occuper de ces solutions négatives, ces solutions étant les solutions positives d'un *cycle* précédent; en appliquant le mot cycle à la période de 12^h; période à mouvement direct qui précède immédiatement la période (1).

Nous pourrions réduire tous les termes de cette période (1) en heures, minutes et secondes. Nous les conserverons sous cette forme (1) et l'on va comprendre pourquoi ci-dessous.

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME

Les deux aiguilles étant toujours sur 12 ou midi, quelles heures marqueront-elles lorsqu'elles feront entre elles un angle a?

Evidemment l'heure où le fait aura lieu pour la première fois après l'heure de midi sera donnée par l'équation

$$12x - x = a$$

et le même fait se produisant de nouveau après un tour entier du cadran, ou deux tours ou n tours du cadran, l'équation générale est alors :

(3) $$12x - x = n \times 12 + a.$$

Mais il est évident que l'angle a a été compris entre les deux aiguilles, avant l'heure de midi. Pour remonter à cet instant, il faut évidemment aussi changer les signes de $12x$ et de x, et nous trouvons ainsi

$$-12x + x = a$$

d'où $$12x - x = -a,$$

ce qui donnera, par analogie

$$12x - x = n \times 12 - a.$$

L'équation générale est donc

(4) $$12x - x = n \times 12 \pm a$$

qui déterminera les 22 heures distinctes où l'angle des aiguilles est a.

L'équation (4) donne $x = \frac{n \times 12}{11} \pm \frac{a}{11}$; et cela montre clairement, — ce qu'on aurait pu prévoir, — que la solution du problème qui nous occupe revient à chercher les 11 rencontres des deux aiguilles pendant 12 heures, puis à augmenter et à diminuer d'un même angle $\frac{a}{11}$ les heures de coïncidence. — Cela nous donne 22 solutions, en faisant varier n de 0 à 11.

APPLICATIONS

1° A quelles heures les deux aiguilles fout-elles un angle droit?

Dans ce cas nous avons $n = 3$, et la formule (4) en donnant à 3 le signe positif, nous donne la série suivante d'heures, au nombre de 11, où l'aiguille des minutes devance celle des heures : $\frac{3}{11}$ $\frac{15}{11}$ $\frac{27}{11}$ $\frac{39}{11}$ $\frac{51}{11}$ $\frac{63}{11}$ $\frac{75}{11}$ $\frac{87}{11}$ $\frac{99}{11}$ $\frac{111}{11}$ $\frac{123}{11}$

où l'on vérifie qu'à 9 heures l'angle est droit.

La série où, tout en faisant un angle droit entre elles, c'est la petite qui devance la grande aiguille, est alors :

$$\frac{9}{11}\quad\frac{21}{11}\quad\frac{33}{11}\quad\frac{45}{11}\quad\frac{57}{11}\quad\frac{69}{11}\quad\frac{81}{11}\quad\frac{93}{11}\quad\frac{105}{11}\quad\frac{117}{11}\quad\frac{129}{11}$$

où l'on vérifie qu'à 3 heures l'angle est droit.

2° A quelles heures les deux aiguilles sont-elles dans le prolongement l'une de l'autre?

L'équation (4), pour ce cas spécial où $a = 6$, donne, avec le signe +, la série suivante :

$$\frac{6}{11}\quad\frac{18}{11}\quad\frac{30}{11}\quad\frac{42}{11}\quad\frac{54}{11}\quad\frac{66}{11}\quad\frac{78}{11}\quad\frac{90}{11}\quad\frac{102}{11}\quad\frac{114}{11}\quad\frac{126}{11}$$

et, avec le signe −

$\frac{6}{11}\ \frac{18}{11}\ \frac{30}{11}$, etc., identique à la précédente, ce qui était facile à prévoir, l'identité consistant ici dans l'*ordre circulaire.*

On voit d'ailleurs qu'à 6 heures les aiguilles sont en ligne droite.

Dans ce qui précède, et pour faciliter les comparaisons et les rapprochements, nous n'avons pas traduit en heures, minutes et secondes, les différentes valeurs de x, qui ont toutes 11 pour dénominateur. On pourra le faire aisément en observant que le onzième d'une heure est

$$5^{m},27^{s},2727...$$

dont la partie décimale est, naturellement, périodique simple.

Le problème général des aiguilles comprend un nombre pour ainsi dire infini de cas particuliers ; les élèves studieux sauront bien les trouver, non sans profit pour eux. Ils pourront même étudier, comme ci-dessus, le cas où une montre est pourvue d'une aiguille centrale à secondes.

CONSTRUCTION DE L'ANGLE DE BOUTIN (*)

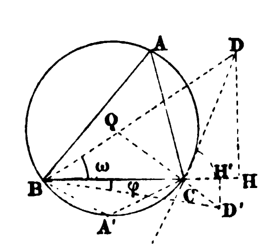
Par M. **A. Poulain**, à Angers.

Cette construction étant calquée sur une de celles qu'on donne pour l'angle de Brocard, rappelons cette dernière.

Il est facile de construire, sur la base BC, un segment $BH = h\sum \text{cotg } A$. Car on a déjà $BC = h(\text{cotg } B + \text{cotg } C)$.

(*) Voir *J. E.* 1892, p. 249, note.

On aura $CH = h \operatorname{cotg} A$, en formant sur le prolongement de BC un triangle rectangle CHD qui ait A pour angle aigu au point C, et h pour côté opposé. L'hypoténuse n'est autre que la tangente en C au cercle ABC. *L'angle* $\omega = DBH$ *est l'angle de Brocard*, puisqu'on a



$$BH = h \operatorname{cotg} \omega, \qquad BH = h \sum \operatorname{cotg} A.$$

On aurait pu avec la même facilité construire un angle ω_a tel que

$$\operatorname{cotg} \omega_a = \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} A.$$

Il suffit de porter CH en sens contraire ; en un mot, de prendre pour hypoténuse la droite symétrique de la tangente CD par rapport à la base BC.

Une méthode analogue donne l'angle φ de M. Boutin. Sa définition est

$$\operatorname{tg} \varphi = \sum \operatorname{tg} A.$$

Élevons en B et C des perpendiculaires aux côtés AB, AC. Soient A' leur point de concours, h' la perpendiculaire abaissée de A' sur BC. On peut construire un segment $BCH' = h' \sum \operatorname{tg} A$. Car déjà $BC = h'(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$. On aura $CH' = h' \operatorname{tg} A$, en formant sur le prolongement de BC, et au dessous, un triangle rectangle CD'H' qui ait $\frac{\pi}{2} - A$ pour angle aigu au point C, et h' pour côté opposé. L'hypoténuse est sur le prolongement du rayon OC du cercle ABC. *L'angle* $\varphi = D'BH'$ *est l'angle de Boutin*, puisqu'on a

$$BH' = h' \operatorname{tg} \varphi, \qquad BH' = h' \sum \operatorname{tg} A.$$

On aurait pu construire de même un angle φ_a tel que

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A.$$

Il suffit de porter CH' en sens contraire ; en un mot, de prendre l'hypoténuse sur la droite symétrique du rayon OC par rapport à la base BC.

UN ELLIPSOGRAPHE (*)

Imaginons un système articulé, formé par quatre droites FB, F'A, FF', AB. On suppose

$$FB = F'A, \qquad AB = FF'.$$

Les points F, F' restant fixes, A, B se meuvent dans un plan. Le point de concours des droites FB, F'A décrit une ellipse.

En effet, en posant

$$AM = x;$$
$$MF' = x';$$
$$MB = y;$$
$$MB' = y';$$
$$F'MF = \alpha;$$

on a $\quad x + x' = y + y',$

et $\quad x^2 + x'^2 - 2xx' \cos\alpha = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos\alpha.$

De ces égalités, on déduit $\quad xx' = yy'$

et par conséquent $\quad x = y \quad x' = y'.$

On a donc $\quad MF + MF'' = FB = C^{te}.$

Autrement. — Joignons F' au point B (cette droite n'est pas tracée sur la figure); les deux triangles F'AB, F'FB sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux. On a donc

$$\widehat{BF'A} = \widehat{F'BF}.$$

Par suite $\quad MB = MF'$; etc.

SUR UNE QUESTION DE MAXIMUM ET DE MINIMUM

Par M. **E.-N. Barisien.**

Étant données deux circonférences concentriques en O, *de rayons* R *et* r, *trouver le maximum et le minimum du segment des cordes parallèles à une direction donnée, intercepté entre les deux circonférences.*

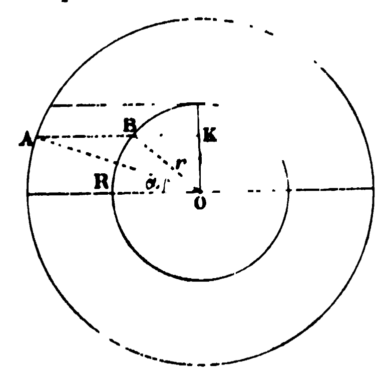
(*) Le principe de cet ellipsographe nous a été verbalement communiqué par M. H. Laurent. Nous ignorons le nom de l'inventeur de cet ingénieux appareil, dont la description est tirée d'un ancien dictionnaire de mathématiques par Savirien. G. L.

Soit D la longueur du segment AB qui s'appuie en A sur la circonférence extérieure de rayon R et en B sur la circonférence intérieure de rayon r. Si K est le point de rencontre de AB avec la perpendiculaire à AB menée par O, et si $(90° - \alpha)$ désigne l'angle $\widehat{KOB}$, on a

(1) $D = AK - BK = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha$

Cherchons le maximum et le minimum de D.

1er procédé. — En chassant le radical dans l'équation (1), on trouve



$$\cos \alpha = \frac{R^2 - r^2 - D^2}{2Dr}.$$

Cette expression étant plus petite que 1, on a

$$R^2 - r^2 - D^2 < 2Dr,$$

ou $(r + D)^2 > R^2$;

donc $D > R - r$.

Donc, le *minimum* de D est $(R - r)$, ce qui a lieu lorsque la corde passe par le centre; α étant compris entre o et 90°, $\cos \alpha$ est positif; donc

$$R^2 > r^2 + D^2,$$

ou $$D < \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Par suite, le *maximum* de D est $\sqrt{R^2 - r^2}$, ce qui est la longueur de la demi-corde tangente au cercle intérieur.

2e procédé. — En prenant la dérivée de D par rapport à α, on trouve

$$D'_\alpha = \frac{-r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + r \sin \alpha$$

$$D''_\alpha = -\frac{r^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sqrt{(R^2 - r^2 \sin^2 \alpha)}} - \frac{r^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(R^2 - r^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} + r \cos \alpha$$

Si $D'_\alpha = o$, on a

$$r \sin \alpha \left(\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha\right) = o.$$

Comme l'expression entre parenthèses ne peut s'annuler, puisqu'elle est égale à D, on aura $D'_\alpha = o$ pour

$$\sin \alpha = o,$$

c'est-à-dire $\alpha = 0°$, ou $\alpha = 180°$.

Comme, pour la valeur $\alpha = 0$,

$$D''_\alpha = \frac{Rr - r^2}{R},$$

et que par conséquent D''_α est positif, il en résulte que le *minimum* de D est $(R - r)$. Pour $\alpha = 180$,

$$D''_\alpha = - \frac{Rr + r^2}{R}.$$

Par suite, D''_α est négatif; le *maximum* de D est donc $(R + r)$.

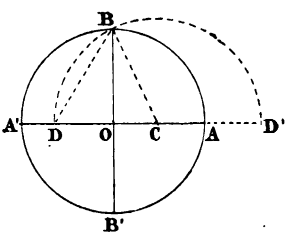
Remarque. — On voit que si le minimum donné par le procédé élémentaire et le minimum donné par le procédé des dérivées coïncident, il n'en est pas de même pour le maximum donné par les deux procédés.

Cela tient à ce que par le premier procédé, on a supposé que α ne dépassait pas 90°. On a bien, lorsque $\alpha = 90°$, un maximum géométrique qui a pour valeur $\sqrt{R^2 - r^2}$; c'est-à-dire que $\sqrt{R^2 - r^2}$ est la longueur de la corde située dans l'intervalle des deux circonférences, qui a la valeur la plus grande. Mais si l'on ne s'astreint pas à ce que la corde soit dans l'intervalle des deux circonférences, mais ait chacune de ses extrémités sur l'une des circonférences, le maximum géométrique sera bien le même que le maximum de la fonction algébrique (1) et aura pour valeur $(R + r)$, pour $\alpha = 180°$. Ainsi, disparaît le désaccord apparent entre les deux procédés.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. H. Laurent.

Je viens de trouver dans un livre, à l'usage des élèves de l'École de la Martinière, une construction pratique, très jolie, faisant connaître le côté du pentagone régulier inscrit à un cercle. Elle vaudrait la peine, je crois, d'être vulgarisée.



Soient AA′, BB′ deux diamètres rectangulaires; O, le centre de la circonférence; C, le milieu de OA.

De C, comme centre, on décrit, avec CB pour rayon,

l'arc BD. Cet arc coupe AA′ en D. Traçons BD; DB est le côté du pentagone.

Cette construction est en effet des plus simples, et elle se démontre bien facilement, comme il suit.

On a $$BC = CD = \frac{R\sqrt{5}}{2},$$

et $$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2CD.CO;$$

ou $$\overline{BD}^2 = \frac{10R^2}{4} - 2\frac{R^2\sqrt{5}}{4}.$$

On a donc $$BD = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

C'est l'expression connue du côté du pentagone régulier ordinaire,

En rabattant CB en CD′, on voit aussi que BD′ est le côté du pentagone étoilé.

On est amené à cette conclusion de la manière suivante :

En désignant par x le côté du décagone régulier inscrit, on sait que

$$x^2 = R(R - x).$$

On a donc $$\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}.$$

Cette égalité conduit à construire le triangle BOC, dont les côtés sont R, $\frac{R}{2}$. Alors $BC = x + \frac{R}{2}$. En rabattant CB, en CD, OD est le côté du décagone régulier ordinaire. Mais on sait que le côté du pentagone régulier est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont le rayon et le côté du décagone régulier. C'est ainsi qu'on est conduit, tout naturellement, à la construction indiquée.

Dans *Mathesis*, 1885, p. 251, on trouve une construction (communiquée par M. Brocard) donnant le double du côté du décagone régulier inscrit et le double du côté du décagone étoilé. Voici cette construction.

Soient AOA′, BOB′ deux diamètres rectangulaires d'une circonférence. On prolonge BA d'une longueur AC = AB et l'on trace CO. Cette droite rencontre l'arc BA′ en D; l'arc AB′ en E; CE, CD représentent, respectivement, le double du côté du décagone régulier ordinaire et le double du côté du décagone régulier étoilé.

Sur le pentagone régulier (ou sur le pentagone approximativement régulier), on pourra consulter : 1° *Les Nouvelles Annales* 1854, p. 190, 410; 2° le *Journal*, 1885, p. 45, 60, et *id.*, 1890. p. 48. On trouvera aussi, dans l'ouvrage de M. Catalan : *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, p. 282, une construction assez simple, d'après Henri Postula, donnant le côté du pentagone régulier. G. L.

Extrait d'une lettre de M. Catalan (à propos de la question 387).

Autant qu'il m'en souvienne, voici comment je suis parvenu à cette *question*.

Quel est le plus petit nombre entier, premier avec 1, 2, 3. . . . n?

1° Soit $N = ab$, un nombre composé, compris entre $n + 1$ et $2n$, *inclusivement*. A cause de $a \geqslant 2$, on a $b \leqslant n$. Ainsi, le facteur b se trouve dans la suite indiquée : N ne satisfait pas à la question.

2° D'après le célèbre *postulatum* de J. Bertrand, *entre* $n + 1$ *et* $2n$, *il y a au moins, un nombre premier*. Soit P le plus petit : P est le nombre demandé. (On fait abstraction de 1).

Voici, à ce propos, une petite proposition :

Théorème. — *Quelle que soit la base du système de numération* (*), *aucun des nombres représentés par*

$$10101, \quad 101010101, \quad 1010101010101, \ldots$$

n'est premier.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

240. — *Soient, dans un triangle,* H *l'orthocentre,* D_2 *le pôle de* $\Omega\Omega'$ *par rapport au cercle de Brocard,* Q *le centre de l'hyperbole de Kiepert,* θ *l'angle de Brocard, on a :*

$$\frac{D_2Q}{D_2H} = \frac{2}{\cot g^2 \theta - 3},$$

241. — *Dans tout triangle, les droites* HH_0 *et* NOR, *se coupent au point* K_0, *réciproque du point de Lemoine.*

(On peut remarquer que K_0 est l'inverse du point D_2, considéré à l'exercice précédent ; c'est également l'anticomplémentaire de D', milieu de $\Omega\Omega'$).

242. — *Les points* H_0, I_0 *partagent harmoniquement la distance* $\Gamma\nu$, *et l'on a :*

$$\frac{I_0\Gamma}{I_0\nu} = \frac{H_0\Gamma}{H_0\nu} = \frac{p^2}{r(4R + r)}.$$

243. — *Dans tout triangle,*

$$\operatorname{tg} IOI' = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B - C}{2}}{\cos 60^\circ - \cos A}.$$

Cet angle est droit si $A = 60^\circ$.

(*) Bien entendu, elle est supposée *entière*, et supérieure à 1.

244. — *Dans tout triangle, θ étant l'angle de Brocard, on a :*

$$\sin A \sin B \sin C \sum \sin A \cos (B + \theta) \cos (C + \theta)$$
$$= \sum \sin^2 A \sin^2 B - \sum \sin^4 A.$$

245. — *1° Le centre de gravité; 2° le centre du cercle inscrit; 3° les centres de chacun des cercles ex-inscrits, ne sont jamais situés sur la circonférence de Brocard. (Sauf le cas où le triangle est équilatéral.)*

246. — *Soit $A_1B_1C_1$ le triangle pédal de O; les cercles circonscrits aux triangles podaires de A_1, B_1, C_1 sont tangents au cercle d'Euler, respectivement au pied de chaque hauteur.*

Soit A_2 le pied de la hauteur issue de A, il suffit de vérifier que O_9A_2 coupe AA_1 en son milieu.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (COMPLET)

(SESSION D'AVRIL 1892) (*).

Académie de Bordeaux.

1° On considère les triangles rectangles dont l'hypoténuse BC est fixe et donnée de position, et dont le sommet A de l'angle droit est variable. Trouver le lieu des centres des cercles inscrit et ex-inscrits.

2° Trouver les valeurs de x et de y satisfaisant aux équations :

$$\sin xy = 1,$$
$$\cos (x^2 + y^2) = 0.$$

Académie de Caen.

1re session. — 1° Déterminer les valeurs x, y qui satisfont aux deux équations :

$$ax + by = c, \qquad a'x + b'y = c' :$$

discuter les résultats obtenus, en supposant qu'aucun des coefficients a, b, a', b' ne soit nul.

2° Etant donné un cercle de rayon R, on mène un diamètre AB et deux cordes AC, AD faisant avec AB un angle α. Montrer que le quadrilatère ACBD peut être considéré comme circonscrit à un cercle; calculer, en fonction de R et de α le rayon x de ce cercle et la distance d de son centre au centre du cercle donné; établir entre R, x et d une relation indépendante de l'angle α.

(*) Énoncés empruntés au *Journal des examens de la Sorbonne*, publié par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne.

2e session. — 1° Etant donné un hexagone régulier ABCDEF, on mène, parallèlement au côté AB, une sécante qui rencontre le périmètre du polygone en deux points P, Q et l'on joint les deux points au milieu O du côté AB. Montrer comment varie l'aire du triangle OPQ quand on fait varier la distance x des parallèles AB, PQ.

2° Etant donné tg a, calculer tg $\frac{a}{2}$.

Appliquer le résultat trouvé au cas où tg $a = \frac{57}{176}$; dire laquelle des deux valeurs obtenues on doit choisir, quand on suppose l'arc a compris entre 9π et 10π.

1° Trouver un nombre entier N, tel que la somme des N premiers nombres soit égale à 2850.

2° Calculer les côtés et les angles d'un triangle rectangle sachant que le périmètre est égal à 24 mètres et que la surface est de 24 mètres carrés.

Académie de Dijon.

1re session. — Trouver, sur la ligne de terre, un point d'où le segment rectiligne compris entre deux points donnés par leurs projections soit vu sous un angle droit.

2e session. — 1° Discussion des formules qui résolvent un système de deux équations à deux inconnues.

2° Un triangle rectangle, sans poids, dont les côtés de l'angle droit ont des longueurs données b, c, est suspendu par le sommet de cet angle à un point fixe A, autour duquel il peut tourner librement. Quels poids faut-il suspendre aux deux autres sommets pour que son hypoténuse soit horizontale dans la position d'équilibre du système.

3e session. — Dans un tétraèdre ABCD, le dièdre AB est droit et les arêtes AC, BD sont toutes deux perpendiculaires à l'arête AB. On donne $AB = d$, $AC = a$, $BD = b$, et on demande d'exprimer au moyen de d, a, b : 1° la longueur de la perpendiculaire commune aux arêtes AB, CD; 2° les distances aux sommets A, B de son pied sur l'arête AB.

Académie de Clermont.

1re session. — On donne deux droites rectangulaires ox, oy et un cercle S de rayon R, tangent à ces deux droites. On mène une tangente au cercle S, rencontrant ox et oy en A et B. Sur AB comme côté, on construit un carré ABCD. Déterminer la tangente AB, de telle sorte que l'aire du triangle OCD ait une valeur donnée $1/2\ a^2$. Discussion. Construction géométrique.

2e session. — 1° Surface de la zone sphérique.

2° Entre quelles limites varie la fraction :

$$\frac{3x^2 - 5x + 3}{2x^2 - 3x + 2}?$$

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1893 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin, les Notices suivantes: Sur l'observatoire du mont Blanc, par J. Janssen. — Sur la corrélation des phénomènes d'électricité statique et dynamique et la définition des unités électriques, par A. Cornu. — Discours sur l'Aéronautique, prononcé au Congrès des Sociétés savantes, par J. Janssen. — Discours prononcé aux funérailles de M. Ossian Bonnet, par F. Tisserand. — Discours prononcés aux funérailles de M. l'Amiral Mouchez, par Faye, Bouquet de la Grye et Loewy. — Discours prononcé par J. Janssen, au nom du Bureau des Longitudes, à l'inauguration de la statue du général Perrier, à Valleraugue (Gard). In-18 de v — 868 pages, avec figures et 2 cartes magnétiques. (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1 fr. 50.)

QUESTION 423

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur au Lycée de Marseille.

Si p_a, p, p_c, ρ *désignent les distances algébriques des points* A, B, C, M *à la droite harmoniquement associée au point* M, *par rapport au triangle* ABC, *on a :*

$$\frac{1}{p_a}+\frac{1}{p_b}+\frac{1}{p_c}=\frac{3}{\rho}.$$

(L. Bénézech.)

Si nous regardons le point M comme le barycentre des sommets A, B, C affectés des coefficients l, m, n, nous avons :

$$(1) \qquad (l+m+n)\rho = lp_a + mp_b + np_c.$$

Nous voyons, sur la figure, que

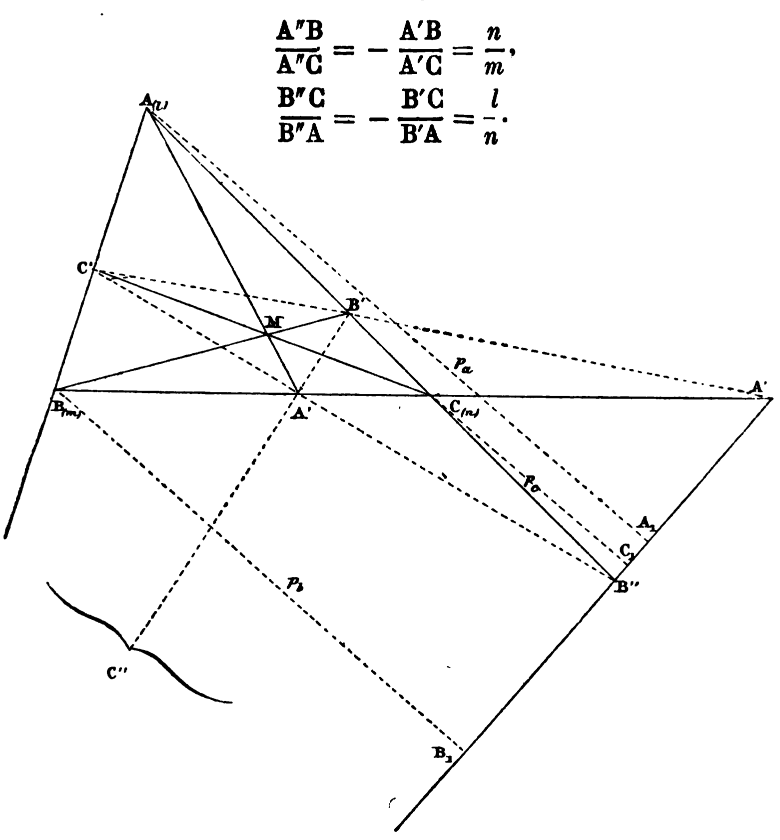
$$\frac{p_a}{p_b}=\frac{C''A}{C''B}, \qquad \frac{p_b}{p_c}=\frac{A''B}{A''C}, \qquad \frac{p_c}{p_a}=\frac{B''C}{B''A}.$$

La droite A″B″C″ étant harmoniquement associée au point M, nous avons :

$$\frac{C''A}{C''B}=-\frac{C'A}{C'B}=\frac{m}{l},$$

$$\frac{\mathrm{A''B}}{\mathrm{A''C}} = -\frac{\mathrm{A'B}}{\mathrm{A'C}} = \frac{n}{m},$$

$$\frac{\mathrm{B''C}}{\mathrm{B''A}} = -\frac{\mathrm{B'C}}{\mathrm{B'A}} = \frac{l}{n}.$$



Par suite $\frac{p^a}{p_b} = \frac{m}{l}$, $\frac{p_b}{p_c} = \frac{n}{m}$, $\frac{p_c}{p_a} = \frac{n}{l}$.

Puis,

(2) $$lp_a = mp_b = np_c.$$

La relation (1) devient alors

$$(l + m + n)\rho = 3lp_a,$$

et par application de (2),

$$\frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c} = \frac{3}{\rho}.$$

Nota. — Autres solutions par M. A. Boutin et par Mme Ve Prime.

QUESTIONS PROPOSÉES

471. — L'inverse du point de Nagel se trouve sur la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au centre du cercle inscrit. *(A. Droz.)*

472. — On donne une circonférence O, une corde AB et une droite XY perpendiculaire à AB. On mène à ce cercle une tangente quelconque ST, qui rencontre XY en S. On décrit de S comme centre, avec ST pour rayon, une circonférence qui coupe AB en D et en E.

1° Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle SDE coupe la circonférence O sous un angle constant.

2° La construction précédente permet-elle de trouver toutes les circonférences qui, ayant leur centre sur XY, coupent la circonférence O sous un angle donné?

3° Construire celle de ces circonférences qui passe par un point donné ou qui a son centre en un point donné de XY. *(Fouché.)*

473. — On donne un triangle ABC; mener à BC une perpendiculaire qui coupe AC en C′, AB en B′, de telle sorte que

$$B'C' = B'B - C'C \, (*).$$

(Mannheim.)

(*) Pour préciser la valeur absolue des segments considérés, on supposera, en traçant la figure en question, le point B′ situé sur le prolongement de BA, et C′ entre les points A, C.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX. — RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 27654-12-92.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. Bernès.

(*Suite*, voir page 3.)

XXX. — Des centres isogones V′, W′ et de leurs transformés v', w'.

1° Par définition, les centres isogones sont les points d'où les trois côtés de ABC sont vus sous des angles égaux. On doit avoir, pour les coordonnées angulaires d'un pareil point, $\lambda = \mu = \nu$ avec $\lambda + \mu + \nu = 0$; d'où $3\lambda = 0$. Ce qui donne les trois solutions

$$\lambda = \mu = \nu = 0,$$
$$\lambda = \mu = \nu = +\frac{\pi}{3},$$
$$\lambda = \mu = \nu = -\frac{\pi}{3}.$$

La première donne un point quelconque à l'infini. Les deux autres définissent les centres isogones. Comme le point don les trois coordonnées sont $-\frac{\pi}{3}$ est l'isogonal du point V, nous le désignerons par V′; c'est le premier centre isogone Celui qui a pour coordonnées $+\frac{\pi}{3}$ est l'isogonal de W; ce sera le second centre isogone W′.

Ces coordonnées mettent aussi en évidence que les centres isogones V′, W′ sont isoptiques, ce qui est d'ailleurs une propriété commune aux points isogonaux de deux points conjugués quelconques.

2° V′ et W′ peuvent se construire comme isogonaux de V et W. — Plus simplement on peut les construire comme isocycliques, le premier de v, le second de w. — Ou encore, d'après un théorème de la Géométrie élémentaire, si v, v_1, v_2 sont les sommets des triangles équilatéraux construits sur BC, CA, AB extérieurement à ABC, et w, w_1, w_2 les som-

mets des triangles équilatéraux opposés, construits sur les mêmes côtés, on sait que V′ est l'intersection des trois droites Av, Bv_1, Cv_2 et W′ l'intersection de Aw, Bw_1, Cw_2. Le point V′ est intérieur au triangle ABC, sauf le cas où la plus petite valeur positive de l'un des angles A, B, C dépasse $\frac{2\pi}{2}$. La démonstration fait voir en même temps que V′ est sur les trois circonférences BCv, ACv_1, ABv_2; et W′ sur les circonférences BCw, ACw_1, ABw_2. En réalité, par conséquent, ce théorème n'est pas distinct de la propriété d'après laquelle V′, isogonal de V, est isocyclique relativement à A et BC du point v transformé de V relativement au pôle A, et pour la même raison est isocyclique relativement à B et AC du point v_1 qui serait le transformé de V relativement au pôle B, etc.

3° Si l'on suppose B, C fixes et le sommet A variable, on voit par là que *les centres isogones* V′, W′ *du triangle variable* ABC *se déplacent sur les cercles fixes* vBC, wBC. *De plus, si* A *se meut sur une droite passant par* v, *le centre isogone* V′ *reste fixe, tandis que* W′ *parcourt le cercle* wBC.

4° *Le transformé* v′ *de* V′ *est l'intersection des deux droites* Cv_1, Bv_2; *et le transformé* w′ *de* W′ *est l'intersection de* Cw_1, Bw_2.

En premier lieu, cette construction résulte de ce que v' est l'isogonal de v. Car Cv, Cv_1 sont antiparallèles relativement à l'angle C, et Bv, Bv_1 le sont relativement à l'angle B. — En second lieu, les coordonnées angulaires de V′ étant $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, les angles du triangle $v'BC$ doivent être $A+\frac{\pi}{3}$, $B+\frac{\pi}{3}$, $C+\frac{\pi}{3}$; en considérant les deux derniers on est conduit à la même construction.

Enfin il est bon d'observer que v_1 et v_2 étant les transformés l'un de l'autre, les deux circonférences ACv_1, ABv_2 dont l'intersection donne V′, ont pour transformées les droites Bv_2, Cv_1, lesquelles doivent par conséquent se couper en v'.

Par cette considération, on voit de plus *que les circonférences*

ACv_2, ABv_1 *passent par* v′ *et les circonférences* ACw_2, ABw_1 *par* w′. Car les deux premières sont les transformées des droites Bv_1, Cv_2 passant en V′, et les deux autres les transformées de Bw_1, Cw_2 qui passent par W′.

On sait en outre que v' est l'isocyclique de V et w' celui de W.

5° Les trois points A, v', w' jouissent d'une propriété remarquable : *en les supposant disposés en cercles dans cet ordre, deux consécutifs quelconques sont respectivement isogonaux de* v *et* w *relativement au triangle que le troisième forme avec* BC.

Ainsi v', w' sont isogonaux de v, w relativement à ABC. De même w' et A sont isogonaux de v, w relativement à v'BC; et A, v' sont isogonaux de v, w relativement à w'BC. Par exemple, w' et v sont isogonaux relativement à v'BC, parce que dans les triangles w'BC, vBC les sommes d'angles, $A - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$. $B - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$, $C - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$ sont égales aux angles du triangle v'BC, $A + \frac{\pi}{3}$, $B + \frac{\pi}{3}$, $C + \frac{\pi}{3}$. Et de même pour les autres.

Il faut remarquer, du reste, d'une manière plus générale que si l'on part de l'un quelconque des trois triangles rangés dans l'ordre tournant ABC, v'BC, w'BC, on en déduit les deux suivants par une même règle, qui consiste à augmenter les trois angles de $\frac{\pi}{3}$, ou à les diminuer tous les trois de $\frac{\pi}{3}$. De là ressort aussi la possibilité de construire w' et A au moyen de v', A et v' au moyen de w'; de la même manière que l'on a construit v' et w' au moyen de A.

6° *Les quatre droites* VV′, WW′, vv′, ww′ *sont parallèles à la droite d'Euler* OH *du triangle* ABC. Comme vv' est parallèle à VV′, et ww' à WW′, il suffira d'établir la propriété pour les droites vv', ww'.

Raisonnons sur vv'. Soit O′ le centre du cercle circonscrit à v'BC; ce centre est, comme le centre O, sur la perpendiculaire à BC en son milieu D, c'est-à-dire sur Dv. Nous allons montrer d'abord que les deux rayons AO, O′v' sont parallèles.

En effet, la différence des angles en B et C dans les deux triangles ABC, v'BC étant la même, on a (AO, OD) = (v'O', v'D) = B − C, et comme OD, O'D coïncident, AO, O'v' sont parallèles. De plus, les deux rayons parallèles O'v', AO sont de même sens ou de sens contraire selon que l'angle A, considéré en valeur absolue, est inférieur ou supérieur à $\frac{2\pi}{3}$. Dans le premier cas, en effet, en supposant aussi le plus grand des angles B ou C, par exemple B, moindre que $\frac{2\pi}{3}$, les angles effectifs en B et C du triangle v'BC sont $\frac{2\pi}{3} - B$, $\frac{2\pi}{3} - C$, de sorte que Bv' est > Cv', tandis que BA est < CA. Les points A et v' sont donc de part et d'autre de wv et AO, O'v' ont le même sens. Même chose si B est $> \frac{2\pi}{3}$, les angles effectifs en B et C dans v'BC étant alors $B - \frac{2\pi}{3}$, $C + \frac{\pi}{3}$. Mais si A est $> \frac{2\pi}{3}$, ces angles sont $B + \frac{\pi}{3}$, $C + \frac{\pi}{3}$, leur ordre de grandeur a changé, et AO, O'v' sont de sens contraires.

Cela posé, considérons le triangle AOH et par v' traçons une parallèle à OH qui rencontre O'v en K. Le triangle O'v'K qui a ses côtés parallèles à ceux de AOH lui est directement semblable et $\frac{O'K}{AH} = \frac{O'v'}{AO} = \frac{R'}{R}$. O'K ayant le même sens que AH ou le sens contraire selon que O'v' et AO sont de même sens ou de sens contraires, c'est-à-dire selon que A est inférieur ou supérieur à $\frac{2\pi}{3}$ Si donc on prouve que O'v = O'K et et que O'v a le sens AH pour $A < \frac{2\pi}{3}$, et le sens contraire pour $A > \frac{2\pi}{3}$, il s'ensuivra que v coïncide avec K et que $v'v$ est parallèle à OH.

Traçons O'C, et abaissons O'L perpendiculaire sur vC. Dans le triangle rectangle O'Lv, la valeur absolue de l'angle en v étant $\frac{\pi}{6}$, on a O'v = 2O'L. Comparons les triangles O'LC,

ODC, rectangles en L et D; on a, en considérant les angles à $K\pi$ près, $(O'L, O'C) = (O'L, vC) + (vC, vD) + (vD, O'C)$. Or $(O'L, vC) = \frac{\pi}{2}$, $(vC, vD) = \frac{\pi}{6}$ et comme O' est le centre de circonférence $v'BC$, on a $(vD, O'C)$ ou $(O'D, O'C) = (v'B, v'C) = A + \frac{\pi}{3}$. D'où il suit $(O'L, O'C) = A = (OD, OC)$. Les triangles rectangles O'LC, ODC sont donc semblables, et $\frac{O'L}{OD} = \frac{OC'}{OC} = \frac{R'}{R}$. Mais $2O'L = O'v$ et $2OD = AH$. Donc $O'v = O'K$.

Voyons le sens de $O'v$. Les troisièmes angles des triangles O'LC, ODC sont égaux, $(CO', CL) = (CO, CD)$ ou $(CO', Cv) = -(CD\ CO)$, c'est-à-dire que les deux droites CO', CD sont antiparallèles relativement à l'angle OCv. Quand A est aigu, D est entre O et v, donc aussi O' et $O'v$ est de même sens que OD, par suite que AH. Si A est obtus, les antiparallèles CD, CO deviennent extérieures à l'angle OCv, mais tant que OCD ou $A - \frac{\pi}{6}$ est $< CvD$ ou $< \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire tant que $A < \frac{2\pi}{3}$, les deux antiparallèles rencontrent Ov de part et d'autre de O et v, et $O'v$, OD et par suite $O'v$, AH sont encore de même sens. Mais si A est $> \frac{2\pi}{3}$, O' passe du même côté de O que D et alors $O'v$, OD ou $O'v$, AH sont de sens contraire, ainsi qu'il s'agissait de l'établir.

Ainsi vv' est parallèle à OH et par suite aussi VV'.

On raisonnerait d'une façon analogue pour démontrer que ww' est parallèle à OH et par suite aussi WW'. *(A suivre).*

SUR LA TRANSFORMATION CONTINUE

Par M. **Michel**, élève du Collège Chaptal.

Nous nous proposons de démontrer le théorème fondamental de la *transformation continue*, de M. Lemoine. (Voir *Journal*, 1892, pages 103, etc.)

Étant données, dans le plan, les droites AA', BB', LL', passant

par un même point O, les directions positives sur ces droites étant définies par les semi-droites OA, OB,... OL situées dans une même région du plan (région *positive*), relativement à un axe-origine UV, passant par O, sur lequel est définie une direction OU, comme direction positive ; nous appellerons, *angle de deux droites* l'angle de leurs directions positives, et *angle de deux directions positives* l'angle dont il faut faire tourner l'une d'elles pour la faire coïncider avec l'autre, en balayant l'espace compris entre les semi-droites. Dès lors, en définissant un sens positif de rotation, c'est-à-dire en appliquant des conventions de signes, analogues à celles qui sont relatives aux segments sur une droite, et qui conduisent à l'identité d'Euler, on arrive à une relation générale entre les directions A, B, C,... L, où les angles sont définis *sans ambiguïté* :

$$(A, B) + (B, C) + \ldots + (K, L) + (L, A) \equiv 0.$$

Cela posé, prenons pour axes de coordonnées deux demi-droites OX et OY, l'une OX coïncidant avec la direction positive de l'axe-origine UV, l'autre OY étant une direction positive définie comme précédemment, et faisant, avec OX, l'angle

$$(X, Y) = \theta.$$

Donnons alors une droite parallèle à OY, MP, dont nous supposerons pour plus de simplicité, l'abscisse $OP=a$ positive, et une droite OM, variable, que nous définirons par les angles de sa direction positive OZ avec les axes de coordonnées. En posant $(OX, OZ) = \alpha, \quad (OZ, OY) = \beta,$
nous aurons dans tous les cas, d'après les conventions précédentes,

$$(1) \qquad \alpha + \beta = \theta.$$

Appelons c l'ordonnée du point M, et b la valeur algébrique du segment OM.

Soit alors une relation, obtenue au moyen de la théorie des projections, modifiée comme il précède,

$$(2) \qquad f(a, b, c, \alpha, \beta, \pi - \theta) = 0, \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta = \theta;$$

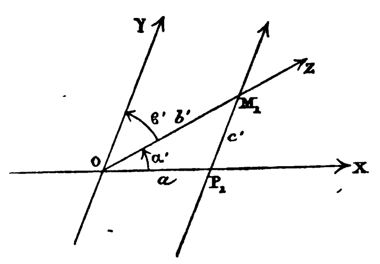
En vertu de nos conventions, cette formule est *générale,* car nous la déduisons de relations entre les *segments* et les *angles*, qui s'appliquent dans tous les cas. Cherchons à l'*interpréter* géométriquement.

Dans l'hypothèse où la direction positive OZ est à l'intérieur de l'angle XOY, les segments a, b, c prennent des valeurs

a', b', c' positives, les angles α et β ont aussi des valeurs positives α' et β'. Par conséquent la relation

$$f(a', b', c', \alpha', \beta', \pi - \theta) = 0$$

ne diffère pas d'une certaine relation géométrique entre les éléments du triangle OM_1P, formé dans cette hypothèse (*fig. 1*).



Dans l'hypothèse où la direction positive (OZ) est au contraire en dehors de l'angle (XOY), les segments b et c prennent des valeurs négatives $-b''$ et $-c''$; l'angle β prend une valeur négative $-\beta''$, de sorte que la relation géométrique qui a lieu dans ce cas, est

$$f(a, -b'', -c'', \alpha'', -\beta'', \pi - \theta) = 0,$$

ou, en observant que les angles α'' et $\pi - \theta$ sont extérieurs au triangle OM_2P formé dans cette hypothèse, et sont supplémentaires des angles correspondants du triangle, α_1 et θ_1

$$f(a, -b'', -c'', \pi - \alpha_1, -\beta'', \pi - \theta) = 0.$$

Mais cette relation géométrique a lieu quel que soit le triangle; en l'appliquant au triangle OM_1P, nous avons la relation géométrique

$$f(a', -b', -c', \pi - \alpha', -\beta', \theta) = 0,$$

d'où résulte bien évidemment la règle de transformation de M. Lemoine. Ce qui fait l'importance de ce mode de démonstration, dont semble parler M. Lemoine dans son premier article, c'est qu'il nous conduit à la notion des triangles *ouverts* et qu'il explique ainsi la supériorité de la *transformation continue* sur les autres transformations.

La droite OM, tournant en effet autour du point O, dans le sens positif, le point M prend d'abord des positions telles que M_1, puis, après le passage à l'infini. des positions telles que M_2. Le triangle *fermé* OM_1P, du premier cas, devient, dans le second, le triangle *ouvert* OM_2P constitué par la portion du plan couverte de hachures. Et la relation géométrique (3) est, par rapport à ce triangle *ouvert*, l'analogue de la relation (2), appliquée au triangle *fermé* OM_1P. La transformation de M. Lemoine consiste, dès lors, à substituer, aux éléments

les éléments corres-
ants d'un triangle
de l'espèce OM_2P.
plus de simplicité,
açons le triangle
par le triangle OM'P
ant lesymétrique du
N_2 par rapport à l'axe

st ainsi que l'angle B
iangle ABC, se trans-
en l'angle $\pi - B$,
e C, en l'angle $\pi - C$;
é a reste a; le sym-
droite indéfinie, le
$-b$, le symbole ∞
es droites qui consti-
me en $\infty - S$, ou sim-
d'une hauteur h_a se
n $- h_a$, etc... (*)
riangle OM'P; par la
considérer comme le
c'est-à-dire le cercle
é OM_2P.
M'P, dans l'angle $\widehat{O}$
x-inscrit dans l'angle
inscrit dans l'angle P

scrit et du centre du
s x se correspondent;
s résultats sont confir-

P devient, après trans-
rapport à OX; on en
en $- R$.

gueur du raisonnement qui
$- b$ ou simplement $- b$
(E. Lemoine.)

Passant à un autre ordre d'idées, nous pouvons dire que trois droites, dans un plan, le partagent en quatre régions ou *triangles*, un triangle *fermé* et trois triangles *ouverts*.

Considérons les rayons des cercles inscrits r, r_a, r_b, r_c relativement au triangle fermé OM_2P. Nous avons vu que r et r_a sont deux éléments correspondants des triangles $OM'P$ (fermé) et OM_2P (ouvert). Mais r et $-r$ se correspondent dans les triangles $OM'P$ et OM_2P (fermés). Donc $-r$ et r_a sont des éléments correspondants d'un triangle fermé et de son triangle ouvert en A; ce qui revient à dire que les éléments $-r$, r_a, r_b, r_c sont les solutions d'un même problème : *Calculer le rayon d'un cercle tangent à trois droites.* Il en est de même des éléments $-p$, $p-a$, $p-b$, $p-c$.

On trouve une vérification de ces considérations dans les formules

$$-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=0,$$
$$-r+r_a+r_b+r_c=4R,$$
$$(-r)(r_a)(r_b)(r_c)=-S^2,$$
$$r_ar_b+r_br_c+r_ar_c-rr_a-rr_b-rr_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$(-p)(-r)=(p-a)r_a=\ldots$$
$$-p+(p-a)+(p-b)+(p-c)=0,$$
$$(-p)(p-a)(p-b)(p-c)=-S^2.$$
etc...

Je terminerai par quelques observations relatives au premier article de M. Poulain, sur la *Transformation des formules du triangle.* (Voir 1892, p. 110 et suiv.)

L'auteur dit que le théorème général de M. Lemoine ne s'applique pas aux relations géométriques irrationnelles. Or, dans une relation géométrique où l'on n'a en vue que les valeurs absolues des longueurs, le radical est précédé du signe +. Mais, comme le théorème résulte de conventions algébriques, on ne peut plus, dans la tranformalion générale qui s'en déduit, imposer de signe au radical; dès lors, dans la formule transformée, le radical n'a pas nécessairement le signe +.

J'ajouterai que le mode de raisonnement que M. Poulain critique en note, page 112, dans ce même article, me semble parfaitement rigoureux; il me paraît évident que l'on a *la même suite de calculs*, abstraction faite du signe attribué au radical carré. D'ailleurs l'objection de M. Poulain contre ce raisonnement n'existe plus, d'après la remarque précédente.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

247. — *L'équation d'un cercle étant :*

$$\sum ayz - (lx + my + nz) \sum ax = o,$$

calculer les coordonnées de son centre.

On trouve, tous calculs faits :

$$\frac{x}{m \cos C + n \cos B - l + \cos A} = \frac{y}{l \cos C + n \cos A - m + \cos B}$$
$$= \frac{z}{m \cos A + l \cos A - n + \cos C}.$$

248. (*) — *Soient* ABC *un triangle*, H *son orthocentre*, M *un point quelconque*, H_a, H_b, H_c *les symétriques de* H *par rapport aux droites* AM, BM, CM. *Démontrer que les quatre circonférences :* AMH_a, BMH_b, CMH_c, ABC *se coupent en un même point.*

Cette proposition se démontre par des considérations géométriques élémentaires.

CORRESPONDANCE

M. John S. Mackay, professeur à l'Université d'Edimbourg, dans une lettre qu'il nous adresse nous fait observer que la construction signalée (p. 17-18 du dernier numéro), est celle qui a été donnée par Ptolémée dans le premier livre de son *Almageste.*

Il résulte de cette communication que la construction en question pourra être enseignée sous la rubrique « *Construction de Ptolémée* ».

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(PARIS, JUILLET 1892).

(18 juillet 1892). — Calculer le rayon de base d'un cylindre inscrit à une sphère de rayon donné R, connaissant la surface totale du cylindre $2\pi a^2$.

— Définition du jour solaire moyen.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

(Sciences. Nouveau régime.)

(1re session, 21 juillet 1892). — *Problème.* — Résoudre le système

$$x + y = a,$$
$$x^3 + y^3 = ab^2.$$

Question de cours. — Le candidat choisira l'une des trois questions suivantes :

(*) Les exercices suivants seront publiés dans le numéro de février du *J. S.* et dans les numéros suivants.

Volume de la pyramide triangulaire.

Énumérer les cas de similitude des triangles.

Propriété de la bissectrice de l'angle d'un triangle.

Questions au choix du candidat.

Lois de la chute des corps.

Lois de Mariotte. Sa vérification.

Loupe.

Problème obligatoire. — Une boîte en laiton mince, ayant la forme d'un cylindre très aplati contient 1080 grammes d'eau; l'une des bases de la boîte est exposée normalement aux rayons du soleil; cette base, qui est noircie de façon à absorber complètement les radiations solaires, a 3 décimètres carrés de surface. On constate que la température de l'eau s'élève d'un demi-degré centigrade en une minute. On demande : 1° quel est le nombre de calories reçues en une heure par un centimètre carré de surface exposée normalement aux rayons solaires; 2° quel serait le nombre de calories reçues en vingt-quatre heures par la surface d'un cercle ayant un rayon égal à celui de la terre, c'est-à-dire ayant 127,000,000 de kilomètres carrés de surface exposée normalement aux rayons solaires. (Chaleur reçue en vingt-quatre heures par la surface de la terre.)

On négligera la capacité calorifique du laiton qui forme la boîte.

(2e session, 25 juillet 1892.) — *Questions à choisir.* — Équilibre d'un corps sur un plan incliné.

Composition de deux forces parallèles.

Centre de gravité d'un trapèze.

Problème obligatoire. — Étudier les variations de la fonction :

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Représenter graphiquement les variations.

Questions à choisir. — Détermination de la densité d'un gaz, par rapport à l'air.

Définition de la chaleur latente de vaporisation.—Mesure de celle de l'eau.

Hygromètre de condensation. Conditions pour que l'expérience soit précise. Décrire un hygromètre remplissant ces conditions.

Problème obligatoire. — Un rayon de lumière, homogène, pénètre, normalement à la face d'entrée, dans un prisme dont l'angle réfringent est de 30°. On constate qu'il prend à l'émergence une déviation de 30°.

1° Calculer l'indice de réfraction de la substance formant le prisme pour la lumière observée;

2° La valeur de la déviation minima, pour un second prisme de même substance et dont l'angle réfringent serait de 60°.

(PROVINCE, AVRIL 1892)

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

Première session. — I. Un plan $p\alpha p'$ étant donné par ses traces, trouver l'angle de ce plan avec la ligne de terre. — Tracer à main levée et expliquer l'épure.

II. Un point matériel O est attiré proportionnellement à la distance par chacun des points d'une droite matérielle homogène AB. — Démontrer que l'attraction résultante, exercée sur le point O, passe par le milieu C de AB, et que son intensité est proportionnelle à la longueur de cette droite.

Deuxième session. — I. On donne, dans une couronne circulaire, la

longueur de la corde de la grande circonférence qui est tangente à l'autre circonférence. — Déterminer l'aire de la couronne.

II. On donne la longueur précédente et la somme des rayons des deux circonférences, calculer les deux rayons et construire la couronne.

Académie de Besançon.

Discuter la fraction $y = \dfrac{x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3}}{3x^2 + (\sqrt{18} - 3)x - \sqrt{18}}$, et construire la courbe représentative.

QUESTION 365

(*J. M.* 1881.)

Solution par M. H. Brocard.

On donne deux circonférences et un point P; *mener, aux circonférences, des tangentes parallèles, telles que le rapport des distances du point* P *aux deux tangentes soit donné.*

Soient A, B, a, b, les centres et les rayons des cercles donnés; p, q, les coordonnées du point P, par rapport aux axes rectangulaires ABX, AY, f le rapport donné; m, l'inclinaison des tangentes; d la longueur AB.

On doit avoir

$$f = \frac{q - mp - a\sqrt{1 + m^2}}{q - m(p - d) - b\sqrt{1 + m^2}}.$$

Réductions faites, m sera donnée par une équation du second degré.

Comme dans l'énoncé interviennent six quantités p, q, a, b, d, f, indépendantes les unes des autres, il ne paraît guère possible d'arriver à une solution pratique.

C'est pourquoi nous avons pensé devoir nous borner à l'indiquer, par les formules de la Géométrie analytique.

QUESTION 378

(*J. M.* 1881.)

Solution par M. H. Brocard.

Trouver les petits côtés d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a *et la somme des carrés des bissectrices des angles aigus.*

Soient BD, CE les deux bissectrices, $B = 2\theta$,

$$K^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2, \quad K^2 = m^2a^2, \quad \operatorname{tg}\theta = \omega.$$

On trouve facilement les valeurs

$$BD = \frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}, \qquad CE = \frac{a \sin 2\theta}{\sin(45^\circ + \theta)}.$$

Donc θ sera déterminé par l'équation

$$m^2 \cos^2\theta \sin^2(45^\circ + \theta) = \cos^2 2\theta \sin^2(45^\circ + \theta) + \sin^2 2\theta \cos^2\theta,$$

dans laquelle il reste à remplacer tg θ par ω.

QUESTIONS 390 ET 421

Solution par M. B. SOLLERTINSKY.

390. — *Si l'on joint le point* D', *où la bissectrice extérieure de l'angle* A *d'un triangle* ABC *rencontre la circonférence circonscrite* Γ, *au centre* I; *cette droite* D'I *rencontre* Γ *en un second point* A'. *Démontrer que* AA' *passe par le centre de similitude externe des circonférences considérées.* (Lauvernay.)

421. — *Démontrer que les distances* p_a, p_b, p_c *des sommets* A, B, C *d'un triangle, à une tangente commune au cercle circonscrit et au cercle ex-inscrit de l'angle* A, *satisfont à l'égalité.*

$$ap_a \cos^2 \frac{A}{2} = bp_b \sin^2 \frac{B}{2} + cp_c \sin^2 \frac{C}{2}.$$

(Louis Bénézech.)

390. — Soient : ω l'intersection de la bissectrice intérieure AD avec le rayon OA'; $\omega\delta$ la parallèle à OD' terminée sur A'D'. Puisqu'on a

$$\widehat{A'\delta\omega} = (\widehat{A'D'D}) = \widehat{A'A\omega},$$

le quadrilatère $AA'\omega\delta$ est inscriptible, d'où

$$\widehat{\omega A\delta} = (\widehat{\delta A'\omega}) = \widehat{A'D'O}.$$

Mais, M étant le milieu de BC,

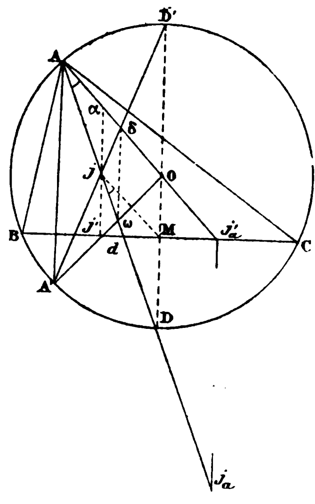
$$\overline{Dj}^2 = \overline{DB}^2 = DM.DD';$$

d'où $\widehat{DjM} = \widehat{jD'M}$,

et, par suite,

$$\widehat{DjM} = \widehat{\omega A\delta},$$

Ainsi la droite $A\delta$, comme étant parallèle à Mj, passe par le point n de Nagel, du triangle ABC.



Par suite, le diamètre du cercle I, perpendiculaire sur BC, a

son extrémité α sur $D\delta$ (*). Le point A est donc le centre de similitude externe du cercle I et de celui qui est décrit de ω, avec le rayon $\omega\delta = \omega A'$. A′ est le centre de similitude externe des cercles O, ω. Par suite, daprès un théorème connu, la droite AA′ doit passer par le centre de similitude externe des cercles I, O.

Remarques. — 1° *Si la droite* Djj_a *rencontre la circonférence* O *en* A″, *la droite* AA′ *passe par le centre de similitude interne des cercles* I, O.

En effet, A_1 étant le symétrique de A par rapport à O, les droites $D'A_1$, AD sont parallèles, d'où le faisceau $D'(jj_aDA_1)$ est harmonique. Par suite, $A(A'A''DA_1) = -1$.

2° Puisqu'on a $\widehat{AI'D} = \widehat{DAn}$, *la droite* AA′ *passe par l'inverse* (isogonal) *du point de Nagel.* Cette propriété du point de contact A′ du cercle ω, a été indiquée par M. G. de Longchamps (*M.* 1889, p. 207, question 659); et nous nous proposons, à ce sujet, de démontrer le théorème suivant :

Les inverses (isogonaux) des huit points des groupes de Nagel et de Gergonne, sont les centres de similitude des cercles inscrits au triangle de référence, relatifs au cercle circonscrit.

Les bissectrices intérieures d'un triangle étant divisées harmoniquement par les centres des cercles inscrits, les projections de ces divisions, sur les côtés correspondants, sont aussi harmoniques; de là, n, g désignant les points de Nagel et de Gergonne, on a

$$A(Hjng) = -1 = B(Hjng) = C(Hjng),$$

c'est-à-dire que les points n, g appartiennent à l'hyperbole équilatère circonscrite à ABC et passant par I (**). La transformée isogonale de cette hyperbole est le diamètre OI du cercle ABC; les inverses n', g' des points n, g divisent harmoniquement le segment OI du diamètre (***).

(*) Voici comment on démontre cette propriété connue : d étant le pied de la bissectrice AD, on a $(Adjj_a) = -1$; la projection sur BC donne une division harmonique. La droite $j'\alpha$, parallèle à AA′ dans le faisceau harmonique qui a pour base cette division et pour sommet le point A′, est partagée, au point j, en deux parties égales.

(**) Les centres de cette hyperbole et des trois autres sont les points de Feuerbach.

(***) $A(Ojn'g') = A(Hjng) = -1.$

On démontrerait, de la même manière, qu'en général les inverses des points correspondants des deux groupes divisent harmoniquement la distance de O au centre du cercle inscrit correspondant.

D'après la remarque 2°, le centre de similitude externe de I, O est donc n', et, par suite, l'autre est g'.

A étant le centre de similitude externe de I, I_a; n' celui de I, O, la droite An' doit rencontrer Oj_a au centre de similitude externe de O, I_a; mais la droite An' doit aussi passer par g'_a; donc, le centre de similitude externe de O, I_a est g'_a ; et le centre de similitude interne est n'_a.

421. — La tangente commune de O, I_a passe par le centre de similitude externe de ces cercles, c'est-à-dire par l'inverse (isogonal) de g_a.

Ce point est le centre de gravité des points A, B, C chargés de masses proportionnelles à

$$-a\cos^2\frac{A}{2},\quad b\sin^2\frac{B}{2},\quad c\sin^2\frac{C}{2}$$

(coordonnées barycentriques de g_a). Donc, d'après une propriété du centre de gravité, pour toute droite passant en ce point, on doit avoir $-ap_a\cos^2\frac{A}{2}+bp_b\sin^2\frac{B}{2}+cp_c\sin^2\frac{C}{2}=0$ (*).

(*) Voici la solution indiquée par M. Bénézech, en nous proposant la question.

D'après un théorème connu, on peut écrire les deux égalités :

$$\frac{1}{2}aRp_a\cos A+\frac{1}{2}bRp_b\cos B+\frac{1}{2}cRp_c\cos C=SR,$$

$$-\frac{1}{2}arp_a+\frac{1}{2}brp_b+\frac{1}{2}crp_c=Sr;$$

d'où $ap_a(\cos A+1)+bp_b(\cos B-1)+cp_c(\cos C-1)=0$,

ou bien $ap_a\cos^2\frac{A}{2}-bp_b\sin^2\frac{B}{2}-cp_c\sin^2\frac{C}{2}=0$, C. Q. F. D.

Remarque. — L'équation barycentrique de la tangente considérée étant

$$\alpha p_a+\beta p_b+\gamma p_c=0,$$

la relation précédente montre que le point dont les coordonnées barycentriques sont $a\cos^2\frac{A}{2}$, $-b\sin^2\frac{B}{2}$, $-c\sin^2\frac{C}{2}$ est sur cette tangente. De même, on prouverait que ce point se trouve sur l'autre tangente commune Il coïncide donc avec le centre de similitude externe des deux cercles considérés. (Voir Probl. de la *Géom. du Tétraèdre*).

Nota. — M. Grolleau, maître répétiteur au lycée de Marseille nous a envoyé une bonne solution de la question 421.

QUESTION 440 (*)

Solution par M. Droz-Farny.

PQR *est la ligne de Simson d'un triangle* ABC, *relative au point* M. *On voit* MA, MB, MC *sous les angles* 2A', 2B', 2C' *du centre de la circonférence circonscrite au triangle* ABC.

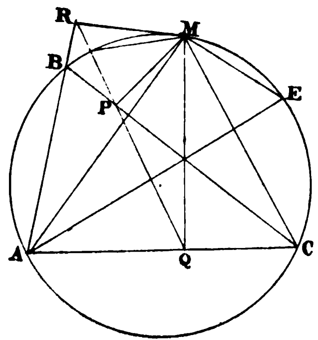
Démontrer que

$$\sin^2 A' \sin A \frac{MP}{QR} = \sin^2 B' . \sin B . \frac{MQ}{RP} = \sin^2 C' . \sin C . \frac{MR}{PQ} .$$

(W. J. Greenstreet, M. A.)

Soit MP perpendiculaire à BC, etc.

On a $$MP.BC = MB.MC. \sin A.$$



Dans le quadrilatère inscriptible MRAQ, on a

$$QR = MA. \sin A;$$

Donc, par division

$$2R \sin A . \frac{MP}{QR} = \frac{MB.MC}{MA};$$

et en remplaçant

$$BC = 2R \sin A,$$

$$\overline{MA}^2 \sin A . \frac{MP}{QR} = \frac{MA.MB.MC}{2R} .$$

Or $MA = 2R \sin A'$

$$\sin^2 A' . \sin A . \frac{MP}{QR} = \frac{MA.MB.MC}{8R^3}, \text{ etc...}$$

Remarque I. $MP.BC = MB.MC \sin A.$

$$MA = MA.$$

$$MP.MA.2R \sin A = MA.MB.MC. \sin A.$$

$$MP.MA = \frac{MA.MB.MC}{2R} .$$

On a donc aussi $MP.MA = MQ.MB = MR.MC.$

Remarque II (**). — Les angles A',B',C' vérifient encore les relations:

$$\sin^2 A \sin^2 A' \frac{PR.PQ}{QR} = \sin^2 B \sin^2 B' \frac{QP.QR}{RP} = \sin^2 C \sin^2 C' \frac{RQ.RP}{PQ} .$$

En effet, soit AE le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

(*) Cette question, proposée p. 168, porte, par erreur, le n° 430.
(**) Cette remarque est de M. Greenstreet.

Joignons M aux points A, B, C, E. Les triangles QMC, AME étant semblables, nous avons

$$\frac{MQ}{MC} = \frac{AM}{AE}.$$

Pour la même raison, dans les triangles RQM, BMC, nous avons

$$\frac{RQ}{MQ} = \frac{BC}{MC}.$$

Donc

$$AM = \frac{AE.QR}{BC} = QR \text{ coséc } A = u \ \left(\text{car } \frac{AE}{BC} = \frac{2R}{a} = \text{coséc } A\right).$$

On aurait, de même :

$$BM = PR \text{ coséc } B = v, \quad \text{et} \quad CM = PQ \text{ coséc } C = w;$$

et

$$\Delta.ABC\,(*) = \Delta MAB + \Delta MAC - \Delta MBC$$
$$= \frac{1}{2}(wu \sin B + uv \sin C - wv \sin A)$$

ou

$$\frac{\sin B}{v} + \frac{\sin C}{w} - \frac{\sin A}{u} = \frac{2\Delta}{uvw} = \frac{1}{\lambda};$$

donc $uvw = 2\lambda\Delta = 4\lambda R^2\Pi \sin A$ (**) (car $\Delta = 2R^2\Pi \sin A$),

ou

$$4R^2 = \frac{uvw}{\lambda\Pi \sin A.}$$

On a $AM = u = AE \sin A' = 2R \sin A'$;

donc

$$\sin^2 A' = \frac{u^2}{4R^2} = \frac{u}{vw}\lambda\Pi \sin A$$
$$= \frac{QR \sin B \sin C}{PR.PQ.\sin A}.\lambda\Pi \sin A$$
$$= \frac{QR}{PR.PQ}.\lambda\Pi \sin^2 A.\frac{1}{\sin^2 A}.$$

Ainsi

$$\sin^2 A'.\sin^2 A.\frac{PR.PQ}{QR} = \lambda\Pi \sin^2 A;$$

le second membre représente une expression symétrique.

Finalement,

$$\sin^2 A'.\sin^2 A.\frac{PR.PQ}{QR} = \sin^2 B'.\sin^2 B.\frac{QR.QP}{RP}$$
$$= \sin^2 C'.\sin^2 C.\frac{RP.RQ}{PQ}.$$

Nota. — La question 440 a été également résolue par M. Grolleau, maître répétiteur au lycée de Marseille.

(*) Par cette notation on représente l'*aire* du triangle ABC.

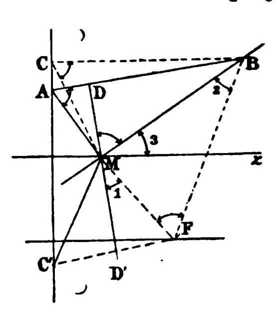
(**) $\Pi \sin A$ représente le produit $\sin A \sin B \sin C$.

QUESTION 431

Par un point quelconque M *d'une tangente à une parabole, en un point* B, *on élève une perpendiculaire à cette droite, laquelle rencontre la directrice en* A ; *puis l'on trace* AB.

Démontrer que la perpendiculaire à AB, *issue de* M, *est tangente à la parabole.* (Leinekugel.)

Soient F le foyer de la parabole; C la projection de B sur la directrice; D la projection de M sur AB. Dans le triangle



rectangle AMB, on a $\widehat{DMB} = \widehat{BAM}$; mais $\widehat{BAM} = \widehat{BCM}$ dans le cercle BCAM, et $\widehat{BCM} = \widehat{BFM}$ à cause des triangles égaux BCM, BFM.

Par suite

$$\widehat{DMB} = \widehat{BFM}.$$

En comparant les angles DMB, BMF, FMD′ dont la sommeest égale à deux droits, avec les angles MFB, on voit que les angles D′MF, MBF sont égaux.

Ayant tracé Mz parallèle à l'axe, on a, par la propriété fondamentale de la tangente à la parabole

$$\hat{2} = \hat{3},$$

et comme $\hat{1} = \hat{2}$,

on a, finalement, $\hat{1} = \hat{3}$.

Cette égalité, en appliquant une propriété connue, prouve que MD′ est tangente à la parabole.

Autrement (*). — F étant le foyer de la parabole, du point M comme centre, avec MF comme rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe en C et C′ la directrice. Les perpendiculaires abaissées de M, sur les cordes FC et FC′, sont les tangentes que l'on peut mener de M à la parabole; en outre, la perpendiculaire en C à la directrice coupe la première de ces tangentes au point de contact B. Le théorème de M. Leinekugel sera démontré si l'on prouve que BA est parallèle à FC′.

(*) Cette seconde solution est de M. A. Droz-Farny.

Or, le quadrilatère BCMA est inscriptible; et par conséquent angle $\widehat{CAB} = \widehat{CMB} = \widehat{CC'F}$ (ce dernier angle étant inscrit à la même circonférence, sur un arc double). Ainsi, FC′ est parallèle à BA.

Nota. — Autres solutions par MM. È. Foucart, élève au lycée Michelet; Grolleau, maître répétiteur au lycée de Marseille.

QUESTION 432

Solution par M. B. Sollertinsky.

Dans les piles de boulets 1° triangulaires; 2° quadrangulaires; quel est le nombre des points de contact de deux boulets?

Le premier nombre n'est jamais un carré.

Trouver dans quel cas le second est un carré.

(E. Lemoine.)

1° Soit a le nombre des boulets dans chaque côté du triangle ABC qui sert de base.

Nous compterons d'abord les points de contact situés sur les boulets de la base.

Les files de boulets, parallèles à l'un des côtés du triangle, donneront

$$(a - 1) + (a - 2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(a-1)a}{2} \text{ points.}$$

Donc, les boulets de la base se touchent entre eux en

$$\frac{3(a-1)a}{2} \text{ points.}$$

Chaque boulet superposé s'appuie sur trois boulets de la base et, par suite, donne encore trois points de contact; mais le nombre de ces boulets est

$$\frac{(a-1)a}{2}.$$

Ainsi, la base contient en tout

$$6 . \frac{(a-1)a}{2} \text{ points de contact.}$$

Le triangle suivant en a

$$6 . \frac{(a-2)(a-1)}{2}, \quad \text{etc.}$$

Par suite, le nombre total est six fois plus grand que le

nombre des boulets contenus dans la pile, ayant dans son arête, $(a - 1)$ boulets.

Le nombre cherché est donc

$$(a - 1)a(a + 1) = a(a^2 - 1).$$

Ce nombre n'est jamais un carré, car $(a^2 - 1)$ n'est pas un carré et n'a pas, avec a, de diviseur commun.

2° Le nombre des points de contact dans le carré, dont le côté contient a boulets, est $2(a - 1)a$, et chaque boulet superposé en donnera encore 4; ainsi la base aura en tout

$$2(a - 1)a + 4(a - 1)^2 = 6a^2 - 10a - 4.$$

points de contact.

Par suite, le nombre total est

$$N = 6\sum a^2 - 10\sum a - 4a = a(a + 1)(2a + 1) - 5a(a+1) + 4a,$$

où, après les réductions,

$$N = 2a^2(a - 1).$$

Ce nombre devient un carré, si l'on pose

$$a - 1 = 2t^2;$$

ou

$$a = 1 + 2t^2,$$

t étant un nombre entier quelconque.

Nota. — Autre solution par M. A. Droz-Farny.

QUESTION 433

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur au Lycée de Marseille.

Si ω tend vers λ, on a :

$$\lim \frac{\sin(\omega - \lambda) + \sin(\lambda - \beta) + \sin(\beta - \omega)}{\sin(\omega - \lambda) + \sin(\lambda - \alpha) + \sin(\alpha - \omega)} = \left(\frac{\sin \frac{\lambda - \beta}{2}}{\sin \frac{\lambda - \alpha}{2}}\right)^2.$$

(E. Lemoine.)

On a : $$\frac{\sin(\omega - \lambda) + \sin(\lambda - \beta) + \sin(\beta - \omega)}{\sin(\omega - \lambda) + \sin(\lambda - \alpha) + \sin(\alpha - \omega)}$$

$$= \frac{\sin \frac{\omega - \beta}{2}\left[\cos\left(\frac{\omega + \beta}{2} - \lambda\right) - \cos \frac{\omega - \beta}{2}\right]}{\sin \frac{\omega - \alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\omega + \alpha}{2} - \lambda\right) - \cos \frac{\omega - \alpha}{2}\right]}$$

$$= \frac{-\sin\frac{\omega-\beta}{2}\sin\frac{\omega-\lambda}{2}\sin\frac{\beta-\lambda}{2}}{-\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\sin\frac{\omega-\lambda}{2}\sin\frac{\alpha-\lambda}{2}} = \frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\lambda}{2}}{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\lambda}{2}}.$$

Si ω tend vers λ, la limite du second membre est

$$\left(\frac{\sin\frac{\lambda-\beta}{2}}{\sin\frac{\lambda-\alpha}{2}}\right)^2.$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. W. GREENSTREET ; A. DROZ-FARNY ; B. SOLLERTINSKI ; A. BOUTIN ; Mme Ve F. PRIME.

QUESTION 434

Solution par M. A. DROZ FARNY.

Soit un triangle ABC, *inscrit à un cercle de rayon* R *et tel que* $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$ *soit constant ; appelons* Ω *et* Ω' *les centres isologiques de ce triangle, c'est-à-dire les points pour lesquels on a*

(1) $$\frac{\Omega A}{BC} = \frac{\Omega B}{AC} = \frac{\Omega C}{AB} = \lambda,$$

$$\frac{\Omega' A}{BC} = \frac{\Omega' B}{AC} = \frac{\Omega' C}{AB} = \lambda'.$$

1° *Pour tous les triangles* ABC, λ *et* λ' *conservent une valeur fixe ;*

2° *Le produit* $\lambda\lambda'$ *est égal à* $\frac{R^2}{D^2}$, *en désignant par* D *la distance constante de l'orthocentre, au centre du cercle donné.*

(E. Lemoine.)

Lemmes. — On a

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C),$$

$$\overline{OH}^2 = D^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C),$$

$$\frac{R^2}{D^2} = \frac{1}{1 - 8 \cos A \cos B \cos C};$$

$$\Pi(a^2 + b^2 - c^2) =$$
$$-a^6 - b^6 - c^6 - 2a^2b^2c^2 + a^4(b^2 + c^2) + b^4(a^2 + c^2) + c^4(a^2 + b^2).$$

1. — Nous supposons le triangle acutangle, c'est-à-dire les deux centres isologiques réels.

Le paramètre λ, défini par les égalités (1) (V. Boutin, *exer-*

cice 202) est racine de l'équation :

$$\lambda^4(\Sigma a^6 - \Sigma 2b^3c^3 \cos A) - 2\, abc\lambda^2\Sigma a^3 \cos A + a^2b^2c^2 = 0.$$

Cette égalité donne λ^2, λ'^2 ; ces quantités sont donc constantes.

2. — On trouve :

$$\lambda^2\lambda_1^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2-a^4(b^2+c^2)-b^4(a^2+c^2)-c^4(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2 - (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$$

$$= \frac{1}{1 - 8\,\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$= \frac{1}{1 - 8.\cos A.\cos B.\cos C} = \frac{R^2}{D^2};$$

$$\lambda^2 + \lambda_1^2 = \frac{2abc\Sigma a^3 \cos A}{\Sigma a^6 - \Sigma 2b^3c^3 \cos A} = \frac{2a^2b^2c^2 + 8a^2b^2c^2 \cos A.\cos B.\cos C}{a^2b^2c^2 - 8a^2b^2c^2\cos A.\cos B.\cos C}$$

$$= \frac{2 + 8\cos A.\cos B.\cos C}{1 - 8\cos A.\cos B.\cos C} = \text{constante}.$$

$\lambda^2 + \lambda_1^2$ ainsi que $\lambda^2\lambda_1^2$ conservent des valeurs constantes ; il en est de même de λ^2 et λ_1^2 et par conséquent de λ et λ_1.

NOTA. — Autre solution par M. B. SOLLERTINSKY.

QUESTION 436

Solution par Mme Ve PRIME.

Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\alpha+\beta & \cos(\alpha+\beta+\gamma) & \cos(\beta+\gamma+\delta) \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta & \cos(\beta+\gamma) & \cos(\beta+\gamma+\delta) \\ \cos(\alpha+\beta) & \cos\beta & 1 & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \\ \cos(\alpha+\beta+\gamma) & \cos(\beta+\gamma+\delta) & \cos\gamma & 1 & \cos\delta \\ \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) & \cos(\beta+\gamma+\delta) & \cos(\gamma+\delta) & \cos\delta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(W. J. Greenstreet.)

On peut construire une infinité de pentagones plans dont les côtés font, avec l'axe $x_1 x$, les angles 0, α, $\alpha+\beta$, $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. La somme algébrique des projections, sur l'axe $x_1 x$, des côtés de chaque pentagone est, comme on le sait, identiquement nulle. De là résulte que si l'on fait tourner l'axe $x_1 x$, successivement, des angles α,

$\alpha + \beta$, $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, autour d'un quelconque de ses points, le système des cinq équations homogènes

$$\begin{array}{llllll}
x_1 & + x_2 \cos\alpha & + x_3 \cos(\alpha+\beta) & + x_4 \cos(\alpha+\beta+\gamma) & + x_5 \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) & = 0, \\
x_1 \cos\alpha & + x_2 & + x_3 \cos\beta & + x_4 \cos(\beta+\gamma) & + x_5 \cos(\beta+\gamma+\delta) & = 0, \\
x_1 \cos(\alpha+\beta) & + x_2 \cos\beta & + x_3 & + x_4 \cos\gamma & + x_5 \cos(\gamma+\delta) & = 0, \\
x_1 \cos(\alpha+\beta+\gamma) & + x_2 \cos(\beta+\gamma) & + x_3 \cos\gamma & + x_4 & + x_5 \cos\delta & = 0, \\
x_1 \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) & + x_2 \cos(\beta+\gamma+\delta) & + x_3 \cos(\gamma+\delta) & + x_4 \cos\delta & + x_5 & = 0
\end{array}$$

est indéterminé. Le déterminant de ce système est donc nul.

Remarque. — Ce procédé de démonstration montre que le théorème précédent existe pour un déterminant d'ordre quelconque, supérieur à $n > 3$.

QUESTIONS PROPOSÉES

474. — On donne un triangle isoscèle *asb* et la circonférence du cercle qui lui est circonscrite. On mène une transversale arbitraire, qui coupe la circonférence aux points *m*, *n* et la base *ab* au point *p*. Démontrer que la somme des angles que les droites *am*, *an*, *ap* font avec la direction *mp* est égale à deux fois l'angle que *as* fait avec cette même direction. *(Mannheim.)*

475. — Une droite, mobile autour du sommet A du triangle ABC, rencontre, en D, la circonférence circonscrite et, en E, le côté BC. La circonférence CDE coupant AC au point F et BF au point G :

1° Démontrer que la droite GE passe par un point fixe ;

2° Trouver le lieu du point G. *(Vve F. Prime.)*

476. — Étant donnés : un triangle ABC, un point P dans son plan, un point D sur BC ; mener par P une droite coupant AB en F, AC en E, de façon que ED et DF aient CB pour bissectrice d'un des angles que les droites forment entre elles. *(E. Lemoine.)*

477. — Si l'on considère un cercle C et un autre cercle C′ passant par le centre O de C, toute tangente à C rencontre la circonférence C′ en deux points A et B, tels que OA $\times$ OB = constante. *(E. N. Barisien.)*

478. — Si deux triangles sont, à la fois, directement sem-

blables et homologiques, leurs centres de similitude et d'homologie sont aux points d'intersection des cercles circonscrits.

(B. Sollertinsky.)

479. — On a

$$\frac{1+x}{1-x}x+\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+\frac{1+x^3}{1-x^3}x^9+\ldots+\frac{1+x^n}{1-x^n}xn^2$$
$$=\frac{x}{1-x}(1+x^n)+\frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{2u})+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}(1+xn^2).$$

(Baschwitz.) (*)

480. — Si dans le triangle ABC, rectangle en A, on joint le centre O du cercle inscrit aux sommets du triangle; et si ν_1, ν_2, ν_3 sont les rayons des cercles inscrits aux triangles BOC, COA, BOA, et l_1, l_2, l_3 les côtés des carrés inscrits aux mêmes triangles, on a

$$\frac{h}{\nu_2}+\frac{c}{\nu_3}-\frac{a}{\nu_1}=2+2\sqrt{2}, \qquad \frac{h^2}{l_2^2}+\frac{c^2}{l_3^2}-\frac{a^2}{l_1^2}=5.$$

(G. Russo.)

481. — Si, dans un triangle ABC, on joint le centre O du cercle inscrit aux sommets du triangle; et si l_1, l_2, l_3 sont les côtés des carrés inscrits aux triangles BOC, COA, AOB, on a

$$\frac{a}{l_1}+\frac{h}{l_2}+\frac{c}{l_3}-\frac{2p}{\nu}=3.$$

Si le triangle est équilatéral, on a

$$\frac{1}{l_1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\nu}.$$

(ν est le rayon du cercle inscrit au triangle ABC.)

(G. Russo.)

(*) Énoncé communiqué par M. Catalan.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 710-1-93.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 25.)

7° *Les deux droites* v'w, wA *sont parallèles entre elles et parallèles à la droite d'Euler du triangle* v'BC. *Et de même* wv' *et* vA *sont parallèles entre elles et parallèles à la droite d'Euler du triangle* w'BC.

En effet, *w'*, d'après 4°, est l'isogonal de *v* relativement au triangle *v'*BC et A l'isogonal de *w*; donc *vw'* et *w*A sont, en vertu du théorème précédent, parallèles à la droite d'Euler de *v'*BC. Et pour la même raison *wv'* et *v*A sont parallèles à la droite d'Euler du triangle *w'*BC.

Corollaire. — *La circonférence* AVW' *est tangente à* AW, *et la circonférence* AWV' *est tangente à* AV. *En outre si* K *est l'intersection de la circonférence* V'BC *ou* vBC *avec la circonférence conduite suivant* AV' *orthogonalement à la circonférence* ABC *et* K_1 *la conjuguée de* K; *et si* l *est le conjugué de* A *relativement à la circonférence* vBC, *la circonférence* AK_1l *est aussi tangente à* AW.

La première partie résulte évidemment par inversion de ce que *vw'* et *w*A sont parallèles, et aussi *wv'* et *v*A. Pour la seconde partie, il suffit de voir que la circonférence AK_1l est la transformée de la droite d'Euler O'H' du triangle *v'*BC. D'abord il est clair que *l* est le transformé de O'. Puis K est le transformé du point où la hauteur *v'*H' rencontre la circonférence *v'*BC, et comme l'orthocentre H' est symétrique de ce point relativement à BC, il a pour transformé le conjugué K_1 de K, et la droite O'H' a pour transformée la circonférence AK_1l.

8° *Les droites* V'W, VW' *se coupent au centre de gravité* G *du triangle* ABC.

Comme O, V, W sont en ligne droite et que VV' est parallèle

à OH et par suite à OG, si l'on démontre que VV′ est de même sens que OG et que le rapport

$$\frac{VV'}{OG} = \frac{VW}{OW},$$

il s'ensuivra que G, V′, W sont en ligne droite ou que V′W passe par G.

D'abord
$$\frac{VV'}{OG} = \frac{VW}{OW}.$$

En effet, d'après 5°, les triangles AOH, $O'v'v$ ont leurs côtés parallèles, d'où

$$\frac{v'v}{OH} = \frac{R'}{R},$$

et comme
$$\frac{VV'}{v'v} = \frac{AV'}{Av}$$

et que $OH = 3OG$, on conclut :

$$\frac{VV'}{OG} = 3.\frac{AV'}{Av}.\frac{R'}{R}.$$

Mais (§ XXI) les distances AV, AV′ sont proportionnelles aux rayons des cercles VBC, V′BC ou v'BC, vBC, rayons dont le premier est R′ et l'autre $\frac{a}{\sqrt{3}}$, de sorte que

$$AV'.R' = AV.\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Donc
$$\frac{VV'}{OG} = \frac{AV}{Av}.\frac{a\sqrt{3}}{R} = \frac{abc.\sqrt{3}}{R.Av^2} = \frac{4S\sqrt{3}}{Av^2},$$

ce qui est un premier résultat à remarquer, comme donnant une expression simple de VV′. On a d'ailleurs (XXVIII, 2°),

$$4S\sqrt{3} = Av^2 - Aw^2,$$

d'où
$$\frac{VV'}{OG} = \frac{Av^2 - Aw^2}{Av^2},$$

et comme
$$\frac{Av^2}{Aw^2} = \frac{AW^2}{AV^2} = \frac{OW}{OV};$$

il suit
$$\frac{VV'}{OG} = \frac{VW}{OW}.$$

Il reste à montrer que VV′ est de même sens que OG. Si en effet la valeur absolue de l'angle A est $< \frac{2\pi}{3}$, nous avons

vu 5° que $v'v$ a le sens OH ou OG, et comme alors A est extérieur à la circonférence vBC, l'isocyclique V' de v est du même côté de A que v et par suite VV' est de même sens que $v'v$ et par conséquent de même sens que OG. Si au contraire A est $> \frac{2\pi}{3}$, $v'v$ est de sens contraire à OG. Mais comme alors A est inférieur à la circonférence vBC, V' et v sont de part et d'autre de A, VV' est donc de sens contraire à $v'v$ et par conséquent encore de même sens que OG.

Par un raisonnement analogue on prouve que

$$\frac{WW'}{OG} = \frac{VW}{OV},$$

et que WW' est de sens contraire à OG, et on en conclut que W'V passe par G.

Remarque. — Il suit de là que VV'WW' est un trapèze qui a pour bases VV', WW', et dont les côtés non parallèles W'V, WV' concourent en G. De plus, la diagonale VW coïncide avec le diamètre de Brocard OG'.

Corollaire I. — *Les circonférences* Awv', Avw' *passent par le point* g, *transformé de* G.

Corollaire II. — *Si la symédiane issue de* v' *dans le triangle* v'BC *rencontre la circonférence* v'BC *en* d_1 *et qu'on prolonge* $v'd_1$ *de* $d_1g_1 = \frac{1}{2}v'd_1$, *les circonférences* v'ww', v'vA *passent par* g_1. *Et si la symédiane issue de* w' *dans le triangle* w'BC *rencontre les circonférences* w'BC *en* d_2 *et qu'on prolonge* $w'd_2$ *de* $d_2g_2 = \frac{1}{2}w'd_2$, *les circonférences* w'wA, w'vv' *passent par* g_2.

Le point g_1 dans le triangle v'BC se construit comme g dans ABC, et de même que v' est l'isogonal de v dans ABC, w' est l'isogonal de v dans v'BC, de sorte que la circonférence Awv' passant par g, la circonférence $v'ww'$ doit passer par g_1. De même pour les autres.

9° *Les diagonales* VW, V'W' *du trapèze* VV'WW' *se croisent au point de Lemoine* G'.

Le point où elles se croisent doit en effet diviser intérieure-

ment chacune, VW en particulier, dans le rapport des bases VV′, WW′, c'est-à-dire (7°) dans le rapport $\frac{OV}{OW}$; donc, ce point coïncide avec G′.

Corollaire. — *Si* Δ, Δ_1, Δ_2 *sont les points de rencontre des médianes* AD, v′D, w′D *des trois triangles* ABC, v′BC, w′BC, *avec la circonférence circonscrite, et qu'on prolonge ces droites de* $\Delta g' = 2D\Delta$, $\Delta_1 g'_1 = 2D\Delta_1$, $\Delta_2 g'_2 = 2D\Delta_2$, *les trois points* g', g'_1, g'_2 *sont sur la circonférence* Av′w′.

g' n'est autre que le transformé de G′. De ce que V′W′ passe par G′, il suit donc par inversion que la circonférence $Av'w'$ passe par g'. Cette circonférence est déterminée par le sommet A de ABC et les isogonaux v', w' de v, w relativement à ABC. Donc le point g'_1 qui dans v'BC se construit comme g' dans ABC, sera sur la circonférence déterminée par le sommet v' et par les isogonaux w' et A de v et w relativement à v'BC, c'est-à-dire que g'_1 est, comme g', sur circonférence $Av'w'$. Et de même g'_2.

10° *Expressions remarquables des distances de* G *aux quatre points* V, W, V′, W′.

Ces distances sont données par les quatre égalités

$$GV' = \frac{1}{3}\,Aw,\quad GW' = \frac{1}{3}.Av,\quad GV = \frac{1}{3}\cdot\frac{Aw^2}{Av},\quad GW = \frac{1}{3}\cdot\frac{Av^2}{Aw}.$$

Établissons d'abord la première $GW' = \frac{1}{3}Aw$. Si A_1 est le symétrique de A relativement au milieu D de BC, A_1v est égal et parallèle à Aw. Soit p la projection de A_1 sur Av, et K le symétrique de v relativement à p. On a $A_1K = Aw$. Nous allons montrer que GV′ est parallèle à A_1K, et pour cela que

$$AV' = \frac{1}{3}\,AK.$$

Si L est le milieu de Av, DL est parallèle à A_1v et égal à $\frac{1}{2}A_1v$, de sorte que A_1L rencontre Dv en un point O_1, tel que

$$DO_1 = \frac{1}{2}\,O_1v;$$

ce point O est donc le centre du triangle équilatéral vBC, et par conséquent $O_1V' = O_1v$, et si q est la projection de O_1 sur Av, $V'q = qv$, et en même temps

$$Lq = \frac{1}{3} Lp.$$

Cela posé on a

$$AV' = AL - V'L = AL - V'q + Lq = Lv - qv + Lq = 2Lq = \frac{2}{3} Lp$$

ou $$AV' = \frac{1}{3}(Av - Kv) = \frac{1}{3} AK.$$

Donc GV′ est parallèle à A_1K et égal au $\frac{1}{3}$ de A_1K ou à $\frac{1}{3}$ Aw.

Remarque. — L'explication montre en même temps quelle est la direction de GV′. GV′ est symétrique de la parallèle menée par G à Aw relativement à la perpendiculaire menée de G sur Av.

On prouve de même que $GW' = \frac{1}{3} Av$.

Puis, OG et VV′ étant parallèles,

$$\frac{GW}{GV'} = \frac{OW}{OV} = \frac{Av^2}{Aw^2}, \quad \text{d'où} \quad GW = \frac{1}{3} \frac{Av^2}{Aw},$$

et de même $$GV = \frac{1}{3} \frac{Aw_2}{Av}.$$

Corollaire I. — De là par différence l'expression des côtés V′W, VW′ du trapèze VV′WW′,

$$V'W = \frac{4S}{Aw\sqrt{3}}, \qquad VW' = \frac{4S}{Av.\sqrt{3}}.$$

En rappelant les expressions de celles des bases WW′, VV′

on obtient $$\frac{V'W}{WW'} = \frac{Aw}{OH},$$

et $$\frac{VW'}{VV'} = \frac{Av}{OH}.$$

A remarquer aussi la relation

$$\frac{GV}{GW} = \frac{Aw^3}{Av^3}, \quad \text{ou} \quad \frac{GV^2}{GW^2} = \frac{OV^3}{OW^3}.$$

Corollaire II. — En transformant par inversion les

relations on en obtient de nouvelles. Nous n'indiquerons que les quatre suivantes qu'on peut obtenir par la similitude de Agv' et AV'G, de Agv et AVG, etc.

$$\frac{gv'}{Av'} = \frac{Aw}{2m}, \quad \frac{gw'}{Aw'} = \frac{Av}{2m},$$

$$gv = \frac{Aw^2}{2m}, \quad gw = \frac{Av^2}{2m}$$

où m désigne la médiane AD.

11° *La distance* GW' *est moyenne proportionnelle entre* GV' *et* GW ; *et la distance* GV' *moyenne proportionnelle entre* GW' *et* GV. — *La diagonale* V'W' *est moyenne proportionnelle entre les deux bases* VV', WW'.

La première partie résulte de ce que d'après 9° on a

$$\frac{GW'}{GV'} = \frac{Av}{Aw} = \frac{GW}{GW'} = \frac{GV'}{GV}$$

et l'on peut remarquer que chacun de ces rapports est aussi égal à celui des côtés non parallèles $\frac{V'W}{VW}$.

(A suivre.)

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \dfrac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$ ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. A. Aubry.

Nous établirons d'abord la double inégalité en question.

1. — Quel que soit x, si m désigne un nombre entier positif, on a

$$(1) \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{m-1} = \frac{x^m - 1}{x - 1}.$$

Changeons x en $\frac{b}{a}$ et faisons disparaître les dénominateurs du premier membre, cette égalité devient

$$(2) \quad a^{m-1} + ba^{m-2} + b^2a^{m-3} + \ldots + b^{m-3}a^2 + b^{m-2}a + b^{m-1} = \frac{a^m - b^m}{a - b}.$$

Le premier membre contient m termes : donc, si a et b sont positifs et que a soit plus grand que b, le premier de ces m termes sera le plus grand, et le dernier le plus petit. On a donc

(A) $$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}.$$

inégalités établies pour le cas de m entier positif et en supposant $a > b > 0$.

2. — Remarque. — Si m est impair, $m - 1$ est pair; et la double inégalité (A) peut s'écrire

$$m(-a)^{m-1} < \frac{(-a)^m - (-b)^m}{(-a) - (-b)} > m(-b)^{m-1}.$$

Si m est pair, en changeant les signes des termes de (A), on aura

$$-ma^{m-1} < \frac{a^m - b^m}{a - b} < -b^{m-1}$$

$$m(-a)^{m-1} < \frac{(-a)^m - (-b)^m}{(-a) - (-b)} < m(-b)^{m-1}.$$

Ainsi, *quel que soit l'entier positif* m, *si les deux nombres quelconques* a, b *sont de même signe, l'expression* $\frac{a^m - b^m}{a - b}$ *a une valeur comprise entre celles des deux suivantes* ma^{m-1}, mb^{m-1}.

La relation (A), que nous appellerons quelquefois dans la suite *relation fondamentale*, a été donnée explicitement, pour la première fois, par Cauchy, dans le tome IV de ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique.*

APPLICATIONS DIVERSES

3. — Dans la première des inégalités (A), posons $a = m + 1$, $b = m$, on trouvera

$$m(m + 1)^{m-1} > (m + 1)^m - m^m,$$

d'où

(1) $$m^m > (m + 1)^{m-1} \quad \text{ou} \quad \sqrt[m-1]{m} > \sqrt[m]{m + 1}.$$

On a donc

(2) $$\sqrt[1]{2} > \sqrt[2]{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \dots \qquad \textit{(Prouhet.)}$$

On peut écrire encore

$$(m + 1)^2 > \frac{(m + 1)^{m+1}}{m^m}.$$

Faisons successivement $m = 1, 2, 3, \ldots m - 1$ et multiplions membre à membre les inégalités ainsi obtenues, il vient aprèsréduction

(3) $$1.2.3 \ldots m > \sqrt{m^m} \quad (*)$$

On tire de là une nouvelle inégalité, due à Prouhet.

On a visiblement

$$\sqrt[m+1]{1}\sqrt[m+2]{2}\sqrt[m+3]{3} \ldots \sqrt[2m]{m} > \sqrt[2m]{1}\sqrt[2m]{2} \ldots \sqrt[2m]{m} = \sqrt[2m]{1.2.3 \ldots m},$$

d'où, à cause de (3)

(4) $$\sqrt[m+1]{1}\sqrt[m+2]{2} \ldots \sqrt[2m]{m} > \sqrt[4]{m}$$

(Prouhet.)

4. — Posons $a = \sqrt{x} + 1$, $b = \sqrt{x}$, $m = 2$, il vient

$$2\sqrt{x+1} > \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} > 2\sqrt{x}, \quad (**)$$

d'ou, en se rappelant que la relation $a > b$ entraîne la suivante $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$,

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} < 2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Faisons successivement $x = a, a+1, a+2, \ldots a+n-1$

(*) *Autrement.* — 1° L'expression $k(m - k + 1)$ croît avec le nombre entier k depuis $k = 1$ jusqu'à $k = \frac{m}{2}$.

En effet, elle est égale à

$$\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+1}{2} - k\right)^2.$$

On a donc

$$1.m < 2(m-1) < 3(m-2) < \ldots < \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} + 1\right);$$

par suite, le produit des quantités $1.m$, $2(m-1)$, $3(m-2)$, ... $(m-2)3$, $(m-1)2$, $m.1$ est supérieur à m^m. De là résulte la relation (3) (Cauchy, *Résumé des leçons d'analyse*).

2° Considérons un nombre k inférieur à $m - 1$. On a

$$mk > k^2 + k, \quad mk + m > k^2 + k + m, \quad (m-k)(k+1) > m.$$

Faisons successivement $k = 0, 1, 2, 3, \ldots m - 1$ et multiplions, on retrouve encore (3) *(Terquem)*.

(**) On arrive également à cette relation en observant que l'on a

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} > \frac{1}{2\sqrt{x+1}},$$

puis, en multipliant et divisant le numérateur et le dénominateur du second membre par $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

et additionnons; il viendra, après réduction,

$$2(\sqrt{a+n}-\sqrt{a})+\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+n}}>\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+2}}$$

$$+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a+n-1}}>2(\sqrt{a+n}-\sqrt{a}).$$

Posons $a=\alpha$ et $n=2\alpha+1$, cette relation donne la suivante, trouvée par M. Catalan *(Traité des séries)*:

$$2<\frac{1}{\sqrt{\alpha^2}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+3}}+\ldots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha+1}}<2\alpha+1$$

On a par exemple

$$2<\frac{1}{100}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\frac{1}{\sqrt{10\,002}}+\frac{1}{\sqrt{10\,003}}+\ldots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{100\,200}}+\frac{1}{101}<2{,}01.$$

5. — Soit à trouver entre quelles limites est comprise la somme de la série illimitée

$$\sum=\frac{1}{a^m}+\frac{1}{(a+1)^m}+\frac{1}{(a+2)^m}+\ldots$$

a désignant une quantité positive, et m un entier positif supérieur à 1.

Posons dans la formule fondamentale $b=a-1$ et changeons m en $m-1$, il vient

$$(m-1)a^{m-2}>a^{m-1}-(a-1)^{m-1}>(m-1)(a-1)^{m-2}$$

d'où, en divisant par $(a-1)^{m-1}a^{m-1}$

$$\frac{m-1}{(a-1)^{m-1}a}>\frac{1}{(a-1)^{m-1}}-\frac{1}{a^{m-1}}>\frac{m-1}{(a-1)a^{m-1}}$$

et *a fortiori*

$$\frac{m-1}{(a-1)^m}>\frac{1}{(a-1)^{m-1}}-\frac{1}{a^{m-1}}>\frac{m-1}{a^m}.$$

Changeons a en $a+1$ dans les deux premiers membres, on a

$$\frac{m-1}{a^m}>\frac{1}{a^{m-1}}-\frac{1}{(a+1)^{m-1}},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{(a-1)^{m-1}}-\frac{1}{a^{m-1}}>\frac{m-1}{a^m}>\frac{1}{a^{m-1}}-\frac{1}{(a+1)^{m-1}},$$

Changeons successivement dans cette dernière relation a en $a+1$, $a+2$, $a+3$, ... $a+n-1$; puis additionnons. Il vient, après réductions,

$$\frac{1}{(a-1)^{m-1}}-\frac{1}{(a+n-1)^{m-1}}>(m-1)\left(\frac{1}{a^m}+\frac{1}{(a+1)^m}+\dots+\frac{1}{(a+n-1)^m}\right)$$
$$>\frac{1}{a^{m-1}}-\frac{1}{(a+n)^{m-1}}.$$

Les seconds termes du premier et du dernier membre tendent vers zéro à mesure que n augmente: on peut donc poser

$$\frac{1}{(m-1)(a-1)^{m-1}}>\sum>\frac{1}{(m-1)a^{m-1}}.$$

Ainsi, par exemple, on a

$$\frac{1}{m-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^m+\left(\frac{1}{3}\right)^m+\left(\frac{1}{4}\right)^m+\dots<\frac{1}{(m-1)2^{m-1}}.$$

III. — Théorème de Cauchy.

6. — Dans la formule fondamentale, posons

$$a=1+\frac{x-\sqrt[m-1]{y}}{m\sqrt[m-1]{y}},\qquad b=1,$$

il viendra $\qquad (m-1)\sqrt[m-1]{y}+x>m\sqrt[m]{xy},$

avec la condition $x^{m-1}>y$, puisque a est supposé plus grand que b.

Si pour les $(m-1)$ nombres $a, b, c, \dots k$, on suppose

$$a+b+\dots+k\qquad>(m-1)\sqrt[m-1]{ab\dots k},$$

on aura

$$a+b+\dots+k+l>(m-1)\sqrt[m-1]{ab\dots k}+l>m\sqrt[m]{ab\dots kl}.$$

Soit $m=2$, on a quels que soient les nombres positifs $a, b,$

$$a+b>2\sqrt{ab}.$$

Il s'ensuit la nouvelle relation

$$a+b+c>3\sqrt[3]{abc}$$

puis $\qquad a+b+c+d>4\sqrt[4]{abcd}$

et ainsi de suite. Donc *la moyenne arithmétique de plusieurs nombres positifs est plus grande que leur moyenne géométrique*, (Cauchy, *Analyse algébrique*) (*).

(*) Nous ne reproduisons pas la démonstration de Cauchy, qu'on trouve dans plusieurs ouvrages. Voir par exemple l'*Algèbre* de M. de Longchamps, page 208.

7. — *Applications*. — I. — On a d'après ce qui précède

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{l}}{m} > \sqrt[m]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}\ldots\frac{1}{l}} = \frac{1}{\sqrt[m]{abc\ldots l}}$$

$$\sqrt[m]{abc\ldots l} < \frac{a+b+c+\ldots+l}{m}$$

d'où

$$\frac{m}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{l}} < \sqrt[m]{abc\ldots l} < \frac{a+b+\ldots+}{m}$$

relation qu'on exprime en disant que *la moyenne géométrique de plusieurs nombres positifs quelconques est toujours comprise entre leur moyenne harmonique et leur moyenne arithmétique.*

En particulier,

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Il est facile de faire voir qu'en appelant A le premier membre et A′ le dernier, on a

$$AA' = ab.$$

Ainsi la recherche de $\sqrt{ab}$ est ramenée à celle de $\sqrt{AA'}$ et l'on peut poser

(1) $$\frac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{A'}} < \sqrt{ab} < \frac{A+A'}{2}.$$

On démontrera aisément que l'on a

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \frac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{A'}}; \quad \frac{A+A'}{2} < \frac{a+b}{2}.$$

Donc, en appelant B et B′ le premier et le dernier membre de (1) on a

$$A < B < \sqrt{ab} < B' < A';$$

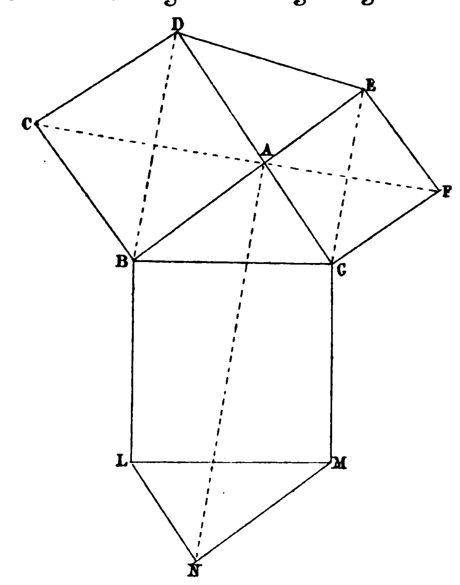
et ainsi de suite. D'où le théorème suivant : *cherchons les moyens arithmétique et harmonique* A′ *et* A *de deux nombres* a, b ; *les moyens arithmétique et harmonique de* A′, A ; *ceux de ces derniers, et ainsi de suite : tous ces moyens se rapprocheront de plus en plus de la limite* $\sqrt{ab}$. Il est même facile de faire voir qu'ils peuvent en différer aussi peu que l'on veut, en poussant les opérations à un nombre de plus en plus grand.

On croit que telle est la méthode qu'employaient les anciens pour l'extraction de la racine carrée des nombres; certains résultats obtenus par Archimède, dans sa recherche de la valeur du nombre π, autorisent en effet cette supposition.

(A suivre.)

DÉMONSTRATION
DU THÉORÈME DE PYTHAGORE (*)
d'après **Terquem.**

L'angle BAC étant droit, construisant le carré ABCD et le carré AEFG, menant les deux hypoténuses BG, DE; la somme des deux carrés sera équivalente à l'hexagone CDEFGB, moins les deux triangles rectangles égaux ABG, ADE; construisant le carré BGLM, et sur LM le triangle LMN égal à ABG et dans une position renversée, on aura un second hexagone équivalent au premier. En effet, menons les diagonales CA, AF formant la droite CAF et AN; les quadrilatères CDEF, AGMN sont égaux, car



$$MN = CD,$$
$$\widehat{NMG} = \widehat{CDE},$$
$$GM = DE,$$
$$\widehat{MGA} = \widehat{DEF},$$
$$EF = AG.$$

On prouve de même que les quadrilatères ABLN, CBGF sont égaux; donc les deux

(*) *Manuel de Géométrie*, de Terquem. Collection Roret, page 104.

Cette démonstration nous a été communiquée par M. Balitrand. Nous la publions parce que nous avons pensé qu'elle intéresserait ceux de nos lecteurs qui ne la connaissent pas. *G. L.*

hexagones sont équivalents; retranchant de chacun les triangles égaux, il reste d'un côté la somme des carrés AC, AF et de l'autre le carré GL; donc on a

$$BGLM = ABCD + AGEF \quad \text{ou} \quad \overline{BG}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AB}^2$$

ce qu'on énonce ainsi :

Le carré construit sur l'hypoténuse BG est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

Ce théorème célèbre, que l'antiquité attribue à Pythagore, porte le nom de ce philosophe; il énonce une des plus belles propriétés de l'espace. La démonstration que l'on vient d'en donner et qui nous paraît nouvelle est très simple, et l'on pourra démontrer cette proposition par une transposition de figures, telle qu'on l'exécute dans le jeu des énigmes chinoises.

La droite CAF est perpendiculaire aux diagonales BD, GE et les divise en deux parties égales; les sommets B, G, sont donc les symétriques des sommets D, E relativement à la droite CAF; si l'on prend le quadrilatère CDEF et qu'on le retourne de manière que F soit en C et C en F, l'hexagone est transformé et devient AGMNLB.

VARIÉTÉS

LES PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE EN 1892

Par M. **Émile Vigarié.**

La présente Note fait suite à celles que nous avons publiées en 1890 et en 1891. Elle donne le résumé bibliographique des recherches qui ont été faites, en 1892, dans la géométrie du triangle.

1. — **Méthodes de transformations.** — La principale méthode de transformation qui ait paru est due à M. Lemoine. L'auteur a publié sur ce sujet trois Mémoires :

1° *Étude sur une nouvelle méthode de transformation dite transformation continue* (*M.* pp. 58-64, 81-92);

2° *Sur les transformations systématiques des formules relatives au triangle. Transformation continue.* (*A. F.*, *Annuaire* de 1891, pp. 118-130) (*).

3° *Règle des analogies dans le triangle. Transformation continue.* (*J. E.*, pp. 103-106.)

Ces trois Mémoires, identiques quant au fond, ne diffèrent que par les détails qui y sont donnés et par le nombre des applications qui y sont faites. Le premier de ces articles contient en outre 142 formules relatives au triangle, qui seront, pour les chercheurs, de la plus haute utilité.

La transformation continue, qui constitue une remarquable application de la règle des signes, consiste en ce fait qu'étant donnée une relation entre les éléments d'un triangle (angles et côtés), on peut trouver, en général, par la permutation ou la combinaison de ces éléments, trois nouvelles formules analogues à la première et applicables au triangle. D'un théorème on pourra donc en déduire trois.

M. Lemoine avait déjà publié un article sur ce sujet, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1891, pp. 136-141).

Cette méthode de transformation, très féconde, a été présentée, avec une grande généralité, par M. A. Poulain dans une Note ayant pour titre *Transformation des formules du triangle.* (*J. E.*, pp. 110-113, 136-139, 151-153.)

La *transformation par inversion symétrique*, dont M. Bernès a commencé la publication dans ce journal en 1891, a continué à paraître en 1892 (pp. 3-5, 25-31, 49-58, 73-82, 97-101, 121-131, 145-151, 169-174, 193-200, 217-223, 241-248, 265-272). Nous attendrons la fin (**) de sa publication pour en donner un résumé.

M. A. Gob, qui, au Congrès de Limoges (*A. F.*, 1890), avait étudié *quelques transformations de figures*, a communiqué, au

(*) Les comptes rendus des Congrès de l'*Association française pour l'avancement des sciences* ne paraissant que dans le courant de l'année qui suit, nous analysons ici les mémoires communiqués au Congrès de Marseille en 1891.

** Cette fin paraîtra dans le numéro prochain. G. L.

Congrès de Marseille (*A. F.*, 1891, pp. 232-241), une étude *sur une série de quadrangles*. Ce travail, qui renferme une nouvelle méthode de transformation que M. Gob désigne sous le nom d'*inversion générale à deux pôles*, contient une application, aux quadrangles, des propriétés des triangles podaires et métaharmoniques et du quadrilatère harmonique.

2. Changements de coordonnées. — En 1886, dans une Note sur les *transformations de coordonnées* (*J. S.*, pp. 265-269), M. Neuberg avait montré que les coordonnées de certains points prennent des valeurs intéressantes quand on remplace le triangle de référence par le triangle complémentaire, ou anticomplémentaire, ou orthocentrique, etc..., et il en avait déduit de nouvelles propriétés du triangle. Une Note de M. Poulain, *sur quelques changements de coordonnées* (*J. E.*, pp. 228-230) vient de compléter ce travail. M. Poulain a pris pour triangle de référence le triangle dont les sommets sont les points semi-réciproques d'un point arbitraire.

3. Distance de deux points. — La publication d'une formule générale donnant la distances de deux points quelconques (voir *J. E.*, 1891, p. 9) devait conduire naturellement au calcul des distances mutuelles des divers points remarquables du plan du triangle. MM. Lemoine et Boutin ont fait ces calculs.

M. Lemoine (*A. F.*, pp. 130-135) a donné environ cinquante formules donnant la distance de deux points remarquables. M. Boutin, dans sa Note : *Distances des points remarquables dans le triangle* (*J. E.*, pp. 248-258), a réuni les formules qui ont été données par d'autres géomètres; en même temps, il en a ajouté un grand nombre, fruit de ses recherches personnelles. C'est ainsi que, sous leur forme la plus condensée, M. Boutin est arrivé à donner environ *cent quatre-vingts* formules donnant les distances mutuelles des principaux points remarquables du triangle. *(A suivre.)*

BIBLIOGRAPHIE

E. Humbert. — **Traité d'arithmétique**, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique et au baccalauréat de l'enseignement moderne, et des candidats à l'institut agronomique ; avec des compléments destinés aux candidats aux grandes écoles du Gouvernement, et une préface de *Jules Tannery*. — Paris, librairie Nony, 1893 ; un vol. in-8° de VII-478 p.

Il y a bien longtemps qu'un véritable *Traité d'arithmétique*, digne de ce nom, n'avait été publié en France, et l'éminent professeur de mathématiques spéciales du lycée Louis-le-Grand vient de rendre un grand service à l'enseignement mathématique, d'une manière générale, en composant l'ouvrage dont il s'agit. Les *compléments* qu'il y a introduits, et dont nous dirons quelques mots tout à l'heure, donnent à son livre un véritable intérêt scientifique. Mais la partie purement classique, à elle seule, suffirait à lui assurer une place de premier ordre parmi les ouvrages d'enseignement. L'arithmétique est en effet un peu dédaignée aujourd'hui. Beaucoup d'élèves, et peut-être quelques professeurs, n'y voient guère autre chose qu'une corvée désagréable, dont il faut s'acquitter en vue de certains examens, et qu'on s'empresse d'oublier, comme une sorte de science d'ordre inférieur, dès qu'on s'élève un peu dans les degrés de l'enseignement. Ceux-là ne s'aperçoivent pas que les principes de l'arithmétique élémentaire sont la base fondamentale de tout le calcul ; et plus d'une fois, ils pourront avoir à souffrir par la suite, de cette ignorance à demi volontaire.

A plus forte raison ne s'occupe-t-on guère de l'arithmétique supérieure, de cette théorie des nombres, naguère illustrée cependant par tant de savants français, et dans laquelle il reste tant à faire.

M. Humbert s'est préoccupé de ces deux points de vue. Par l'ensemble de son *traité*, il donne un exposé rigoureux, et d'une clarté remarquable, des théories élémentaires nécessaires aux élèves en vue des examens. Par les *compléments*, composés en petit texte, il permet à ceux qui le désirent de pénétrer plus avant dans la science du calcul, et il nous offre une véritable introduction à la théorie des nombres.

L'ouvrage est divisée en six livres, après quelques préliminaires d'ordre général.

Le livre I, comprend les numérations, les quatre opérations sur les nombres entiers et la divisibilité ;

Le livre II, les nombres premiers, le plus grand commun diviseur, le plus petit commun multiple et la décomposition en facteurs premiers ;

Le livre III, les nombres fractionnaires, les opérations sur ces nombres, et les nombres décimaux ;

Le livre IV, les racines (carrée et cubique) et les nombres incommensurables ou irrationnels ;

Le livre V, les rapports et proportions et leurs applications ;

Le livre VI, les erreurs, divers problèmes et théorèmes, et le système métrique.

Nous ne pouvons insister sur aucun point particulier, et nous sommes forcé de nous borner à signaler l'esprit de méthode, l'irréprochable enchaînement qui a présidé à cette exposition. Il nous sera permis seulement de signaler en passant le développement considérable qu'a donné M. Humbert à la théorie des nombres incommensurables, sur laquelle on exige aujourd'hui des détails et une rigoureuse précision, peut-être en disproportion avec la puissance intellectuelle moyenne des élèves. La méthode qu'il emploie dans ce but et qui consiste à prendre pour point de départ la mesure des longueurs, nous paraît être de beaucoup la meilleure, surtout au point de vue de l'enseignement.

Les *Compléments*, et chacun d'eux vient dans le livre à sa place naturelle, portent principalement sur les nombres entiers négatifs, et les opérations qui s'y rapportent, sur les systèmes de numération, sur la divisibilité, les résidus potentiels, le théorème de Fermat, l'équation indéterminée $ax + by = c$, les congruences, le théorème de Wilson, l'indicateur, les inégalités, les fractions périodiques, les résidus quadratiques, les critériums d'Euler et de Gauss, le théorème de Bachet (qui a pu pénétrer dans les éléments, grâce à la démonstration (*) récente et si remarquable de M. Matrot, ingénieur en chef des Mines), et les nombres irrationnels négatifs.

On voit d'après cela que le lecteur attentif qui se sera donné la peine de profiter du livre de M. Humbert se trouvera bien armé pour entamer l'étude de la théorie des nombres; et que l'élève désirant tout simplement préparer ses examens, et qui aura sauté les Compléments, connaîtra néanmoins tout ce qu'il y a de véritablement utile pour lui dans les éléments d'arithmétique.

Il est probable que celui-là même, bien souvent, reprendra plus tard sur les rayons de sa bibliothèque le livre de M. Humbert, et sera tenté de s'initier ainsi aux premières notions de la théorie des nombres, si attrayante pour l'esprit. C.-A. LAISANT.

Interrogations de physique, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques élémentaires, des candidats à l'école spéciale militaire de Saint-Cyr et des candidats aux baccalauréats classique et moderne par A. Bleunard, docteur ès sciences, professeur au lycée d'Angers (Librairie classique P. Delaplane, 48, rue Monsieur-le-Prince). — Prix 2 fr. 50.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Académie de Poitiers.

Première session. — I. Retour du quotient décimal illimité 0.34275275... à la fraction génératrice. Peut-on prévoir, d'après la composition en nombres premiers du dénominateur d'une fraction irréductible, quelle sera la nature du quotient décimal dans lequel elle sera convertie?

(*) Nous publierons dans le prochain numéro une nouvelle démonstration du théorème de Bachet, par M. Matrot; cette démonstration simplifie encore, notablement, celle à laquelle M. Laisant fait ici allusion.

G. L.

II. On donne un cercle O, de rayon A; sur le rayon OA pris comme diamètre, on décrit un cercle O′. On demande de déterminer, sur un rayon OB perpendiculaire à OA, le centre d'un troisième cercle O″ tangent aux deux premiers. On pourra faire voir que le quatrième sommet du rectangle construit sur OO′ et OO″ est le centre d'un quatrième cercle tangent aux trois premiers.

Deuxième session. — I. Un corps pesant, de poids P, est abandonné sans vitesse initiale au point le plus élevé d'un plan incliné de hauteur h, de longueur l, parfaitement poli. Quelle vitesse aura ce corps après avoir parcouru la longueur du plan, et quel temps mettra-t-il à la parcourir? Quel sera le travail effectué pendant ce temps?

II. Déterminer, sur une droite CX, un point M, tel que la somme de ses distances à deux points fixes A et B soit égale à une longueur donnée $2a$? On donne l'angle α que fait CO avec la droite CAB, la distance $CO = d$ du point C au milieu de AB et la longueur $AB = c$. Discussion.

Académie de Lyon.

Première session. — Étant donnés les trois points A, B, C qui font partie d'un réseau géodésique, on a relevé le point P en observant les angles APB, CPB. On propose de rattacher le point P au canevas principal, en calculant les angles BAP, BCP. On prendra

$$AB = 235^{m},415,$$
$$BC = 198^{m},923,$$
$$APB = 57^{\circ}30'20'',$$
$$BPC = 61^{\circ}29'17'',$$
$$ABC = 118^{\circ}51'29''.$$

Deuxième session. — I. Démontrer que la différence entre l'arc et son sinus est plus petite que le quart du cube de l'arc.

II. Mesure du tronc de pyramide.

III. Problème.

La surface d'un cercle est de $254^{mq}.46$; on demande la longueur de l'arc sous-tendu par une corde de $7^{m}56$.

Académie d'Alger.

I. La surface totale d'un cône est le double de celle de sa base, et son volume est de 1 mètre cube. Calculer: 1° l'angle du sommet; 2° le rayon de base; 3° l'angle au centre du secteur que l'on obtiendrait en développant, sur un plan, la surface latérale du cône.

II. Etant donnés trois points A, B, C, le premier, A, sur la ligne de terre: le second, B, sur le plan horizontal et le troisième, C, sur le plan vertical, trouver et construire le lieu des points de l'espace également distants de ces trois points.

Académie de Grenoble.

I. On donne l'équation

$$(12m + 7)x^2 - 3(14 - 3m)x + 11 - 3m = 0,$$

et l'on demande les valeurs qu'il faut attribuer à m:

1° Pour que les racines soient réelles;

2° Pour qu'il y ait une racine double;
3° Pour que l'unité soit comprise entre les racines;
4° Pour que 2 et — 1 soient extérieurs aux racines.

Enfin, de résoudre l'équation pour $m = \frac{5}{7}$.

II. Les cordes communes à un cercle fixe C et aux divers cercles passant par deux points A, B, passent par un point fixe.

Application à la construction du cercle tangent à C et passant par A et C.

Académie de Lille.

I. Trouver et discuter toutes les solutions de l'équation

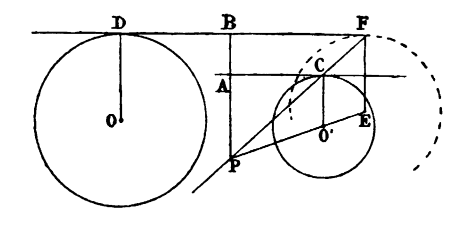
$$a \sin x + b \cos x = c.$$

I. On donne deux droites parallèles et un point P situé en dehors de ces droites. Placer, entre les deux droites, une perpendiculaire MM′ telle que l'angle MPM′ ait une valeur donnée. (a et b sont les distances du point P aux deux droites $b > a$.)

QUESTION 365 (*)

On donne deux circonférences et un point P; *mener aux circonférences des tangentes parallèles, telles que le rapport des distances du point aux deux tangentes soit donné.*

Soient AC, BD les tangentes demandées et $\frac{m}{n}$ le rapport de leurs distances, PA, PB, au point P donné. Menons PC qui rencontre BD en F; et, par le point F, menons FE parallèle à O′C; soit E le point d'intersection de FE et de PO′. On a



$$\frac{PO'}{PE} = \frac{O'C}{EF} = \frac{PC}{PF} = \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}.$$

Ces relations font connaître PE et EF. On décrira une circonférence de E comme centre, avec EF pour rayon, on mènera la tangente commune FD aux circonférences O et E; puis la tangente à O′, au point C.

(*) Cette solution nous a été communiquée par M. Ancellin, élève à l'école supérieure d'Amiens.

Voyez une autre solution (*Journal*, p. 36).

NOTE (*). — Cette question est tirée de l'ouvrage de M. Petersen (*Méthodes et théories*, etc., quest. 138), et on trouve là l'indication suivante : « En *multipliant* (**) l'un des cercles par rapport à P, le problème se ramène à celui de mener les tangentes communes à deux cercles. »

En effet, le rapport des distances du point P aux tangentes étant égal à $m : n$, si l'on construit la troisième circonférence. homothétique de la seconde par rapport à P et dans le rapport $m : n$ à celle-ci, la tangente cherchée à la première circonférence touchera aussi la troisième,

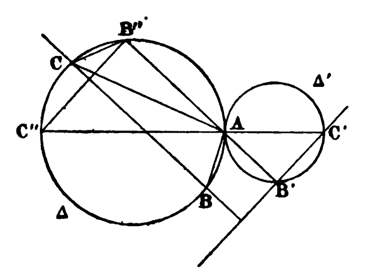
La question admet donc, en général, quatre solutions faciles à construire.

QUESTION 435

Solution par Mme Vve F. PRIME.

Deux circonférences Δ, Δ′ *se touchent au point* A; *deux droites rectangulaires rencontrent ces circonférences, respectivement, aux points* B, C, B′, C′. *Démontrer que la somme des angles aigus formés par les droites* BA, B′A; CA, C′A *est égale à un angle droit.*

(Mannheim.)



Soient B″, C″ les points où les droites B′A, C′A rencontrent, pour la seconde fois, la circonférence Δ. D'après une propriété bien connue, la droite B″C″ est parallèle à B′C′, et, par suite. perpendiculaire sur BC. On a ainsi

$$\widehat{BAB'} + \widehat{CAC''} = \widehat{B''CB} + \widehat{CB''C''} = 1 \text{ droit.}$$

C. Q. F. D.

NOTA. — Solutions analogues par M. B. SOLLERTINSKY; E. FOUCART, élève au lycée Michelet; A. DROZ-FARNY.

(*) Cette observation nous a été communiquée par M. Sollertinsky.

(**) Cette expression un peu singulière se trouve expliquée par la construction indiquée par M. Petersen et que notre jeune correspondant, M. Ancellin, a retrouvée. *G. L.*

QUESTION 437 (*)

Solution par M. A. Boutin.

Le cercle de Brocard et le premier cercle de Lemoine sont concentriques. (Brocard.)

Si l'on prend les équations de ces cercles, sous la forme suivante :

$$abc\sum x^2 - \sum a^2yz = 0,$$

$$abc\sum x^2 - \sum a^2yz - \mathrm{R}\ \mathrm{tg}\ \theta\ (\sum ax)^2 = 0.$$

Or
$$\sum ax = 2\mathrm{S};$$
donc le dernier terme est constant; les équations de ces deux cercles ne différant que par une constante, ceux-ci sont concentriques.

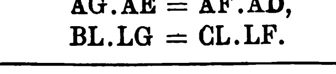
Nota. — Autre solution par M. Grolleau, maître répétiteur au lycée de Marseille. M. Grolleau observe que le rayon du premier cercle de Lemoine est égal au rayon du cercle des neuf points, multiplié par la sécante de l'angle de Brocard.

QUESTION 448

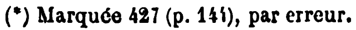
Solution par Mme Ve Prime.

Si entre les côtés AB, AC *d'un triangle* ABC, *on trace* DE *parallèle à* BC, *puis* FG *anti-parallèle relativement à l'angle* A; *l'axe radical des circonférences* BEG, CDF *est indépendant de la position de* DE; *il coïncide avec la droite qui joint* A *à la rencontre des droites* BG, CF.

Désignons par L, le point d'intersection des droites BG, CF. FG étant anti-parallèle à la fois à DE et à BC, les quadrilatères DFGE, BFGC sont inscriptibles; et, ainsi, on a les deux égalités



$$\mathrm{AG.AE} = \mathrm{AF.AD},$$



$$\mathrm{BL.LG} = \mathrm{CL.LF}.$$

(*) Marquée 427 (p. 141), par erreur.

Elles démontrent que les points A, L appartiennent, l'un et l'autre, à l'axe radical des circonférences BGE, CDE.

NOTA. — Autres solutions par MM. SVECHNICOFF, à Troïtzk; Ernest FOUCART, élève au lycée Michelet; A. DROZ-FARNY.

QUESTIONS PROPOSÉES

482. — La somme des carrés de trois nombres entiers, multipliée par la somme des doubles produits des carrés de ces nombres, est une somme de trois carrés entiers.

(E. Lemoine.)

483. — On a des jetons de deux espèces, les uns J de rayon R, les autres *j* de rayon *r*. On dispose des jetons *j* autour d'un jeton J de manière que chacun d'eux touche à la fois le jeton J et les deux jetons *j* les plus voisins.

1° A quelle condition la couronne formée par les jetons *j* se ferme-t-elle?

2° Est-il possible de déterminer les rayons *r* et R de façon que l'on puisse, à la fois, faire une couronne fermée de *j* autour d'un J et une couronne fermée de J autour d'un *j* ?

(d'Ocagne.)

484. — On considère dans un triangle ABC les milieux des côtés, les points A′, B′, C′, et les pieds H, H′, H″ de ses hauteurs.

1° Les circonférences ACB′, ABC′ coupent respectivement BC en deux points P, Q qui sont isotomiques sur A′H;

2° La parallèle à AB, menée par P et la parallèle à AC, menée par Q, sont deux transversales réciproques du triangle HH′H″.

(G. L.)

485. — Démontrer que l'expression

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\beta-\alpha)-2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)\cos 2\alpha$$

est indépendante de β.

(G. L.)

486. — Eliminer le paramètre φ entre les deux égalités

$$2x \sin^3 \theta = c \sin^2\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$2y \sin^3 \theta = c \sin^2\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right).$$

(G. L.)

487. — Si p est un nombre premier (autre que 2), en posant

$$\theta_{p.q} = \frac{2^q - 1}{2 - 1} + \frac{3^q - 1}{3 - 1} + \dots + \frac{(p - 1)^q - 1}{p - 2}.$$

$\theta_{p.q} + q + 1$ est un multiple de p. *(G. L.)*

488. — Étant données deux forces PQ, non situées dans un même plan, trouver leur résultante générale, la position de l'axe central de réduction et la grandeur du couple minimum. Discuter en supposant que, l'angle des forces restant constant, ainsi que la force P, la force Q varie de $-\infty$ à $+\infty$.

(H. Dellac.)

489. — On donne un cône droit S à base circulaire O; sur la circonférence de la base on porte indéfiniment, à partir d'un point A, un arc donné α, et l'on joint les sommets S aux points ainsi obtenus. Sur ces génératrices on prend les longueurs $SA = l$, $SB = ml$, $SC = m^2l\dots$, m étant un nombre donné plus petit que l'unité, et on tire les lignes AB, BC, CD...

1° On regarde les droites SA, SB, SC... comme des forces appliquées en S, et on demande de trouver leur résultante;

2° On regarde les droites AB, BC, CD... comme des forces tirant dans le sens indiqué par l'ordre alphabétique; et on demande de trouver leur résultante générale, ainsi que le couple résultant de la translation de toutes ces forces au sommet S.

Grandeur du couple minimum (*). *(H. Dellac.)*

490. — Sur deux droites Δ, Δ' on considère deux points fixes A, A'. Soient B, B' deux points mobiles tels que le quadrilatère ABA'B' soit inscriptible à un cercle.

(*) Voir *J. M. E.*, tome Ier, page 40 et année 1887, page 281, question 202.

Par A, B on mène des parallèles aux bissectrices des bissectrices des droites Δ, Δ'. La diagonale δ du rectangle ainsi formé, et celle du rectangle analogue construit avec A'B', concourent en un point dont le lieu géométrique est une droite passant par le milieu de AB. *(G. L.)*

491. — On donne un triangle ABC rectangle en B. On joint les points B et C à un point quelconque M du plan du triangle. De A, on abaisse la perpendiculaire AP sur BM; en C, on élève la perpendiculaire CO à CM. Ces droites se coupent en O et l'on projette ce point orthogonalement en R sur BC. La perpendiculaire MQ sur AC coupe BC au point isotomique de R. *(Mannheim.)*

NOTA. — Les questions 443, 478, comme nous le fait observer M. B. Sollertinsky, ont été déjà proposées.
La première sous le n° 342, a été résolue (*Journal*, 1890, p. 261).
La seconde, que m'avait autrefois proposée M. Sollertinsky et dont j'avais retrouvé l'énoncé dans mes papiers, se trouve résolue par M. Sollertinsky, lui-même, incidemment, à la page 287 du *Journal*, 1891.
D'après cette Note, il ne sera pas publié de solutions nouvelles des questions 443, 478.

ERRATA

1° Dans la solution 390, p. 37, la droite $A\delta$ sur la figure (p. 37) ne passe en O que par une coïncidence du dessin et dans toute la solution les centres des cercles inscrits sont désignés tantôt par J, J_a, tantôt par j, j_a.
P. 38, l. 7 *Au lieu de* Djj_a *lisez* $D'j_a$;
l. 13 *Lisez* $\widehat{A'AD} = \widehat{DAn}$;
l. 15 *Au lieu de* w *lisez* ω;
l. 5 (en remontant) *Au lieu de* A' *lisez* [illegible]

2° Page 48, l. 5 et 6 au lieu de xn^2 lisez x^{n^2}.

3° Ligne 6, *au lieu de* $1 + x^{2u}$ *lisez* $1 + x^{2n}$.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3004-2-93.

NOUVELLE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

DU THÉORÈME DE BACHET

par M. **Matrot.**

J'ai donné, dans le numéro d'août 1891, une démonstration élémentaire du théorème de Bachet fondée sur la considération des *résidus quadratiques*. La nouvelle démonstration ci-après est affranchie de cette considération; elle rattache étroitement le théorème de Bachet au théorème de Fermat : $a^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}(p)$.

Afin d'en mieux faire embrasser l'ensemble, je reproduirai les énoncés de tous les lemmes; mais je renverrai, pour la démonstration des lemmes I, I *bis*, II et II *bis*, au numéro précité du *Journal (1891, pages 169 et suiv.)*.

Lemme I. — *Le produit d'un nombre quelconque de sommes de quatre ou de moins de quatre carrés, est lui-même une somme de quatre carrés au plus.*

Lemme I *bis*. — *Le produit d'un nombre quelconque de sommes de deux carrés est lui-même une somme de deux carrés.*

Lemme II. — *Tout nombre premier qui divise une somme de quatre ou de moins de quatre carrés premiers dans leur ensemble, est lui-même une somme de quatre carrés au plus.*

Lemme II *bis*. — *Tout nombre premier, qui divise une somme de deux carrés premiers entre eux, est lui-même une somme de deux carrés.*

Lemme III. — *Tout nombre premier de la forme* $4k + 1$ *est une somme de deux carrés; tout nombre premier de la forme* $4k + 3$ *est une somme de trois ou de quatre carrés.*

Soit $p = 2h + 1$ un nombre premier impair. a étant

un entier quelconque non divisible par p, on a, en vertu du théorème de Fermat :

$$a^{2h} - 1 = (a^h - 1)(a^h + 1) = \mathfrak{M}(p),$$

ce qui entraîne, soit

(1) $$a^h - 1 = \mathfrak{M}(p),$$

soit

(2) $$a^h + 1 = \mathfrak{M}(p).$$

Chacune des égalités (1) et (2) ne peut être vérifiée que par une partie des entiers non divisibles par p. En effet, si l'on supposait, par exemple, que les $p - 1$ entiers inférieurs à p vérifient tous l'égalité (1), tous les termes de la somme $S_h = 1^h + 2^h + \ldots + (p - 1)^h$ seraient de la forme $\mathfrak{M}(p) + 1$, et l'on aurait $S_h = \mathfrak{M}(p) + p - 1 = \mathfrak{M}(p) - 1$. Or cela est impossible, car h est plus petit que $p - 1$, et l'on sait que, *pour toute valeur de* q *inférieure à* p $-$ 1, *la somme* $S_q = 1^q + 2^q + \ldots + (p - 1)^q$ *est divisible par* p (*). Puisque $S_h = \mathfrak{M}(p)$, il faut évidemment que, parmi les $p - 1$ entiers inférieurs à p, il y en ait exactement la moitié qui vérifient l'égalité (1) et la moitié qui vérifient l'égalité (2).

Cela posé, soit d'abord $p = 4k + 1$; $h = 2k$ étant pair, a^h est un carré, et puisqu'il existe des entiers satisfaisant à l'égalité (2), p divise des sommes de deux carrés premiers entre eux ; par conséquent, p est une somme de deux carrés.

Soit maintenant $p = 4k + 3$. On peut toujours trouver deux entiers consécutifs, $\alpha, \alpha + 1$, satisfaisant, le premier à l'égalité (1) et le second à l'égalité (2). En effet, s'il en était autrement, les $p - 1$ entiers $1, 2, \ldots, p - 1$, vérifieraient tous l'égalité (1), puisque le premier d'entre eux, 1, la vérifie. Or on vient de voir que cela est impossible. Soit donc :

(3) $$\alpha^h - 1 = \mathfrak{M}(p),$$

(4) $$(\alpha + 1)^h + 1 = \mathfrak{M}(p).$$

(*) Ce théorème, dont la place est toute marquée dans l'étude des propriétés des nombres premiers, à côté des théorèmes de Fermat et de Wilson, se démontre aisément au moyen de considérations purement élémentaires. *(Voir l'appendice ci-après.)*

Multiplions l'égalité (3) par α et l'égalité (4) par $\alpha + 1$:

$$\alpha^{h+1} - \alpha = \mathfrak{M}(p),$$

$$(\alpha + 1)^{h+1} + \alpha + 1 = \mathfrak{M}(p);$$

d'où, en additionnant :

(5) $$\alpha^{h+1} + (\alpha + 1)^{h+1} + 1 = \mathfrak{M}(p).$$

Ici $h = 2k + 1$ est impair et $h + 1$ est pair ; α^{h+1} et $(\alpha + 1)^{h+1}$ sont donc des carrés et le premier membre de l'égalité (5) est une somme de trois carrés premiers entre eux : p divisant une telle somme, est lui-même une somme de trois ou de quatre carrés. (On sait qu'un entier de la forme $4k + 3$ ne peut pas être une somme de deux carrés).

Théorème de Bachet. — *Tout nombre entier* E *est la somme de quatre carrés au plus.*

Décomposons E en ses facteurs premiers. 2 est une somme de deux carrés $(1^2 + 1^2)$; en vertu du lemme III, tous les facteurs premiers impairs sont des sommes de deux, trois ou quatre carrés : donc, en vertu du lemme I, E est lui-même une somme de quatre carrés au plus.

Remarque. — Il résulte évidemment des lemmes I *bis*, II *bis* et III, que les entiers ne renfermant aucun facteur premier de la forme $4k + 3$, sont *tous et seuls* des sommes de deux carrés.

APPENDICE

Théorème. — p *étant un nombre premier impair et* q *un entier inférieur à* $p - 1$, *la somme* $S_q = 1^q + 2^q + \ldots + (p - 1)_q$ *est divisible par* p.

On reconnaît à première vue que la somme $S_1 = 1 + 2 + \ldots + (p - 2) + (p - 1)$ est divisible par p. Il suffit, par conséquent, de prouver que, si la proposition est vraie pour les $q - 1$ sommes $S_1, S_2, \ldots, S_{q-1}$, elle l'est nécessairement aussi pour S_q. En effet, puisque $S_1 = \mathfrak{M}(p)$, on en conclura $S_2 = \mathfrak{M}(p)$, puis $S_3 = \mathfrak{M}(p)$, et ainsi de suite.

Soient a et m des entiers quelconques ; on sait qu'on peut écrire

(6) $(a+1)^m=a^m+ma^{m-1}+Aa^{m-2}+Ba^{m-3}+\ldots+Qa^2+Ra+1$,
A, B, ..., Q, R étant des entiers indépendants de a (*).

Faisons $m=q+1$, et successivement $a=p-1$, $a=p-2$, ..., $a=2$:

$$p^{q+1}=(p-1)^{q+1}+(q+1)(p-1)^q+A(p-1)^{q-1}+B(p-1)^{q-2}+\ldots+Q(p-1)^2+R(p-1)+1$$

$$(p-1)^{q+1}=(p-2)^{q+1}+(q+1)(p-2)^q+A(p-2)^{q-1}+B(p-2)^{q-2}+\ldots+Q(p-2)^2+R(p-2)+1$$

. . . .

$$2^{q+1}=1^{q+1}+(q+1).1^q+A.1^{q-1}+B.1^{q-2}+\ldots+Q.1^2+R.1+1.$$

Additionnons, il vient :

$$p^{q+1}+S_{q+1}-1=S_{q+1}+(q+1)S_q+AS_{q-1}+BS_{q-2}+\ldots+QS_2+RS_1+p-1$$

$$(q+1)S_q=p^{q+1}-AS_{q-1}-BS_{q-2}-\ldots-QS_2-RS_1-p.$$

Les sommes S_1, S_2, ... S_{q-1} étant supposées divisibles par p, on a $(q+1)S_q=\mathfrak{M}(p)$; mais, puisque $q<p-1$, on a $q+1<p$: p est donc premier avec $q+1$, et divisant $(q+1)S_q$, il divise S_q, C. Q. F. D.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite et fin*, voir page 49.)

La seconde partie est une conséquence de la première. En effet, puisque $\overline{GW'}^2=GV'.GW$ et que d'ailleurs V et W étant d'un même côté de O, V' et W sont d'un même côté

(*) Si l'on ne veut pas supposer connu le *binôme de Newton*, on peut y uppléer de la manière suivante :

On reconnaît à première vue l'exactitude de la formule (6) pour $m=2$, $m=3$: il suffit par conséquent de prouver que, si on la suppose vraie pour $m=n$, elle l'est nécessairement aussi pour $m=n+1$. Soit donc, par hypothèse :

$$(a+1)^n=a^n+na^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+\ldots+Qa^2+Ra+1,$$

A, B,..., Q, R étant des entiers indépendants de a.

Multiplions par $a+1$; il vient :

$$(a+1)^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)a^n+(A+n)a^{n-1}+(B+A)a^{n-2}+\ldots+(R+Q)a^2+(1+R)a+1.$$

Les coefficients $A+n$, $B+A$,..., $R+Q$, $1+R$ sont des entiers indépendants de a; donc, etc.

de G, la circonférence WV'W' est tangente à W'G et

$$\frac{WW'}{WV'} = \frac{GW}{GW'} = \frac{Av}{Aw}.$$

De même la circonférence VW'V' est tangente à GV' et

$$\frac{W'V'}{VV'} = \frac{GV'}{GV} = \frac{Av}{Aw}.$$

Donc

$$\frac{WW'}{W'V'} = \frac{W'V'}{VV'};$$

ou

$$W'V'^2 = WW'.VV'.$$

Corollaire. — De là

$$\frac{W'V'}{OG} = \frac{4S\sqrt{3}}{Av.Aw}.$$

Car on a trouvé

$$\frac{VV'}{OG} = \frac{4S\sqrt{3}}{Av^2}$$

et

$$\frac{WW'}{OG} = \frac{4S\sqrt{3}}{Aw^2}.$$

Et de là aussi, en se reportant à l'expression de l'autre diagonale VW (§XXVIII, 2°) $\frac{W'V'}{VW} = \frac{OG}{R}$.

12° *Introduction dans les formules des côtés* γ_1, γ_2 *des triangles équilatéraux qui sont les podaires des points* V, W.

On sait que le podaire de V relativement à ABC est symétriquement semblable au triangle équilatéral vBC et par suite directement semblable à wBC. Si γ_1 désigne le côté de ce podaire on a

$$\frac{\gamma_1}{a} = \frac{AV}{2R} = \frac{bc}{2R.Av}$$

ou $\gamma_1 = \frac{abc}{2R.Av}$ ou $\gamma_1 = \frac{2S}{Av}$

et de même pour le côté γ_2 du podaire de W

$$\gamma_2 = \frac{2S}{Aw}.$$

De là

$$VW = \frac{R.\gamma_1.\gamma_2.\sqrt{3}}{S},$$

$$\frac{VV'}{OG} = \frac{\gamma_1^2\sqrt{3}}{S}, \quad \frac{WW'}{OG} = \frac{\gamma_2^2\sqrt{3}}{S}, \quad \frac{V'W'}{OG} = \frac{\gamma_1.\gamma_2.\sqrt{3}}{S},$$

$$VW' = \frac{2\gamma_1}{\sqrt{3}}, \quad WV' = \frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}}.$$

Remarque. — D'après un théorème général sur les centres des circonférences circonscrites aux podaires de deux points isogonaux, les centres des deux triangles équilatéraux podaires de V et W sont au milieu l'un de VV′, l'autre de WW′; ils sont donc en ligne droite avec G et avec G′.

13° Autre propriété du triangle A*v′w′*. *Les centres isodynamiques* V *et* W, V_1 *et* W_1, V_2 *et* W_2 *des trois triangles* ABC, v′BC, w′BC *sont distribués deux à deux sur les trois côtés du triangle* Av′w′. — *Ils sont aussi deux à deux, dans un groupement différent, situés sur les trois circonférences* ABC, v′BC, w′BC.

V et W sont les transformés de *v* et *w* relativement au triangle ABC. Nous définirons V_1 et W_1 comme étant les transformés par inversion symétrique de *v* et *w* relativement au triangle *v′*BC, *v* étant le pôle et *v′*B.*v′*C la puissance d'inversion. Et de même V_2 et W_2 sont supposés les transformés de *v* et *w* relativement à *w′*BC. Et il convient de remarquer que V_1 n'est pas nécessairement plus rapproché que W_1 du centre de la circonférence *v′*BC; cela n'a lieu que lorsque *v′* est comme A à l'opposé de *v* relativement à BC. Même remarque sur V_2.

Si A_1, B_1, C_1 désignent les angles de *v′*BC qui ont pour valeurs

$$A + \frac{\pi}{3}, \qquad B + \frac{\pi}{3}, \qquad C + \frac{\pi}{3},$$

les angles de *v*BC étant égaux à $-\frac{\pi}{3}$, les coordonnées angulaires de V, relativement à *v′*BC seront

$$A_1 + \frac{\pi}{3}, \qquad B_1 + \frac{\pi}{3}, \qquad C_1 + \frac{\pi}{3},$$

c'est-à-dire $A - \frac{\pi}{3}, \qquad B - \frac{\pi}{3}, \qquad C - \frac{\pi}{3}.$

Elles sont donc égales aux angles de *w′*BC et par conséquent V_1 est l'isocyclique de *w′* relativement à *v′* et BC, c'est-à-dire qu'il est à l'intersection de *v′w′* avec la circonférence *w′*BC. Par la même explication W_1 est à l'intersection de A*v′* et de la circonférence ABC; V_2 à l'intersection de A*w′* et de la circonférence ABC, et W_2 à l'intersection de *v′w′* et de la circonférence *v′*BC. Et comme déjà V est à l'inter-

section de Av' et de la circonférence $v'BC$ et W à l'intersection de Aw' et de la circonférence $w'BC$, on voit que

$v'w'$ contient V_1 et W_2,
$w'A$ contient V_2 et W.
Av' contient V et W_1;

et, en même temps,

V_2 et W_1 sont sur la circonférence ABC
V et W_2 sont sur la circonférence $v'BC$
V_1 et W sont sur la circonférence $w'BC$.

Remarque. — Quant aux centres isogones V', W'; V'_1, W'_1; V'_2, W'_2, des trois triangles ABC, $v'BC$, $w'BC$, il y en a, conformément à 2° : trois, sur la circonférence vBC, savoir V', V'_1, V'_2; les trois autres W', W'_1, W'_2 sont sur la circonférence wBC. Les trois premiers sont respectivement sur les trois droites vA, vv', vw'; les autres, sur les droites wA, wv', ww'.

SUR LE THEORÈME DE PONCELET
(DANS LE CAS DES CERCLES)

Par M. **Henry Verrière**, élève au Lycée Louis-le-Grand.

La présente Note a pour objet de faire connaître deux démonstrations du théorème de Poncelet qui, peut-être nouvelles, ne reposent pas sur la relation d'Euler. Nous énoncerons et démontrerons ensuite quelques propriétés relatives aux triangles circonscrits à un cercle fixe et inscrits à un autre cercle fixe.

Théorème de Poncelet. — *Si deux cercles* O *et* I *sont tels qu'il existe un triangle inscrit au premier et circonscrit au second; il existe une infinité de triangles inscrits au premier et circonscrits au second.*

Nous utiliserons deux lemmes, dans la démonstration qui suit.

Lemme 1. — *On considère un triangle* ABC, *le cercle circonscrit et une corde* MN. *Par les points* M, N, *on fait passer trois circonférences tangentes, respectivement en* A', B', C' *aux côtés* BC *et* AC *du triangle; les droites* AA', BB', CC' *sont concourantes.*

Soient α, β, γ les points de rencontre de la droite MN avec les côtés du triangle. On a :

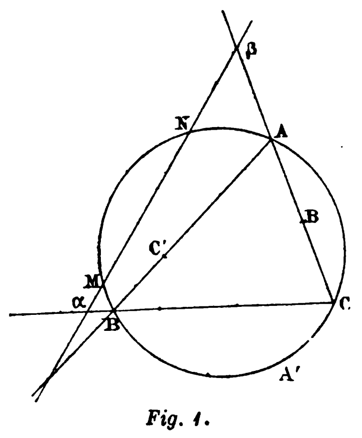


Fig. 1.

$$\overline{\alpha A'}^2 = \alpha M.\alpha N = \alpha B.\alpha C,$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\alpha A'}{\alpha C'} = \frac{\alpha B}{\alpha A} = \frac{\alpha A' - \alpha B}{\alpha C' - \alpha A'},$$

ou en égalant le produit des deux premiers rapports au carré du troisième :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C'} = \frac{\overline{A'B}^2}{\overline{A'C}^2}.$$

De même,

$$\frac{BC}{BA} = \frac{\overline{B'C}^2}{\overline{B'A}^2};\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\overline{C'A}^2}{\overline{C'B}^2},$$

d'où

$$\left(\frac{A'B.B'C.C'A}{A'C.B'A.C'B}\right)^2 = 1,$$

ou comme les trois rapports du premier membre sont négatifs,

$$\frac{A'B.B'C.C'A}{A'C.B'A.C'B} = -1;$$

ce qui montre que les droites AA', BB', CC' sont concourantes.

Lemme 2. — *Lorsque les trois côtés d'un triangle inscrit a un cercle fixe roulent sur trois courbes, dans chaque position du triangle mobile, les droites qui joignent les points de contact des côtés avec les sommets opposés sont concourantes.*

Ce théorème se vérifie immédiatement (*). On considère deux positions très voisines *abc*, *a'b'c'* du triangle, et l'on applique à l'hexagone *abc'a'b'c* le théorème de Pascal ; puis on fait tendre le triangle *a'b'c'* vers *abc*.

Ceci posé, soient F, G les points où les circonférences O et I, supposées sécantes, se coupent ; soit encore ABC un triangle tel

(*) Ceci exige pourtant quelques explications. Si l'on considère les deux triangles infiniment voisins ABC, A'B'C', en appliquant le théorème de Pascal (facile à démontrer élémentairement sur cet exemple), on voit que AA' coupe B'C en un point P, qui, à la limite est le conjugué harmonique, sur BC, du point P' où BC touche son enveloppe. Les points tels que P étant en ligne droite, les droites telles que AP' concourent au point harmoniquement associé à la droite de Pascal. *G. L.*

qu'il soit inscrit au cercle O et que ses côtés AB, AC soient tangents au cercle I, en des points D, E. Si, par les points F, G, on fait passer une circonférence tangente à la corde BC en K ; d'après le premier lemme, les droites CD, BE, AK sont concourantes ; donc, d'après le second lemme, le cercle FGK est tangent, en K, à une courbe enveloppe du côté BC; ce qui n'est possible que si ce cercle est l'enveloppe même.

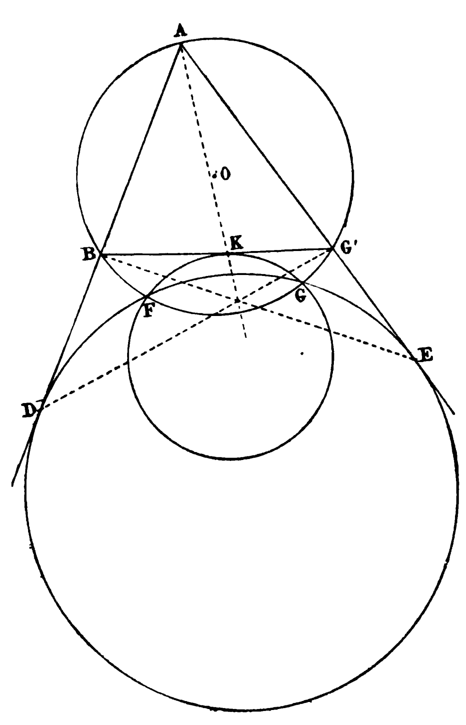


Fig. 2.

Or, l'énoncé du théorème de Poncelet suppose que, pour une position du triangle ABC, le côté BC est tangent au cercle I; mais d'après ce qui précède, le cercle passant par les points F et G et tangent au côté BC (cercle se confondant par hypothèse avec le cercle I) reste toujours tangent au côté mobile obtenu en joignant les points de rencontre avec la circonférence des tangentes menées d'un point mobile de cette circonférence au cercle I; le théorème est donc démontré (**).

Autrement (Cette démonstration est de M. Clairin, élève au

(**) Lorsque les cercles O et I sont intérieurs, on a une démonstration analogue. Car ces cercles étant quelconques; si, d'un point du cercle O on mène des tangentes au cercle I, la corde du cercle O obtenue en prenant les points où ces tangentes le coupent a pour enveloppe un cercle coradical aux cercles O et I; cercle qui se confond avec le cercle I lorsqu'il existe un triangle inscrit O et circonscrit à I.

lycée Louis-le-Grand) (*fig. 3*). — Transformons la figure par inversion, en prenant I pour pôle et le carré du rayon du cercle I pour puissance. Les transformés des sommets A, B, C sont les points a, b, c, milieux des cordes de contact C′B′, C′A′, A′B′. La transformée de la circonférence (O) est donc la circonférence des neuf points du triangle A′B′C′. Or, à tout point (*) α' de ce cercle, on peut faire correspondre un triangle A″B″C″ inscrit

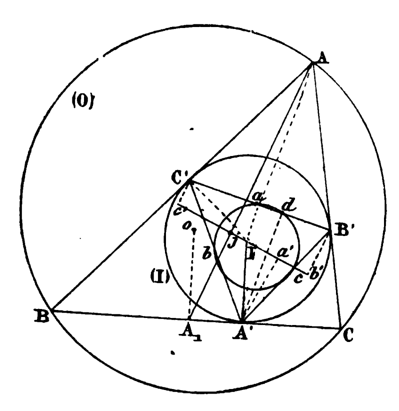


Fig. 3.

à I, et ayant le cercle abc pour cercle des neuf points. En effet, δ' étant le point où la perpendiculaire élevée en α', à $I\alpha'$ rencontre le cercle abc; si, par ce point, nous menons une perpendiculaire à C″B″, le point A″ où cette perpendiculaire coupera le cercle I détermine, avec B″C″, un triangle A″B″C″ remplissant les conditions énoncées. Or, à chaque triangle A″B″C″ correspond un triangle inscrit dans (O); donc le théorème est démontré (**).

REMARQUES

1° Lieu des milieux des côtés du triangle ABC, *du centre du cercle des neuf points de ce triangle, de son centre de gravité et de son orthocentre.*

(*) Ce point n'existe pas sur la figure.

(**) Nous rappelons ici la démonstration connue du théorème de Poncelet pour deux coniques quelconques, quand on considère des triangles inscrits à l'une, circonscrits à l'autre. On sait que (*) :

Si l'on considère deux triangles ABC, A′B′C′ *inscrits dans une conique* Γ, *les six côtés touchent une conique* Γ′.

Le théorème de Poncelet résulte immédiatement de cette proposition. Soit ABC un triangle inscrit à Γ, circonscrit à Γ′. D'un point A′, pris arbitrairement sur Γ, menons deux tangentes à Γ′; elles coupent Γ aux points B′, C′. Les deux triangles ABC, A′B′C′ étant inscrits dans une même conique Γ, leurs côtés touchent une autre conique. Or les droites AB, AC, BC, A′B′, A′C′ touchent Γ′; douc B′C′ touche Γ′. G. L.

(*) Voyez, à ce sujet, un article de M. Catalan (*Journal de Math. sp.*, 1885, p. 3), article qui se termine par cette proposition : *Dans deux triangles homologiques : 1° les côtés sont ceux d'un hexagone de Pascal; 2° les sommets sont ceux d'un hexagone de Brianchon.*

Par exemple, le milieu de BC, le point A_1 décrit la courbe podaire du cercle (I) par rapport au point O; c'est un limaçon.

On sait que le cercle des neuf points a un rayon égal à la moitié du rayon du cercle O et qu'il est tangent au cercle I; par conséquent R étant le rayon de O et r celui de I, on a

$$IO_9 = \frac{R}{2} - 2.$$

Le lieu du point O_9 est donc un cercle concentrique au cercle I, et par suite le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC décrivent des cercles homothétiques au cercle lieu du point O_9.

2° *Le centre de gravité et l'orthocentre du triangle* A'B'C' *sont des points fixes.*

En effet le centre du cercle des neuf points de ce triangle est un point fixe, car ce cercle est le transformé du cercle O; I étant pris pour origine et $\overline{IA'}^2$ pour puissance d'inversion. Le centre de gravité et l'orthocentre du triangle A'B'C' sont donc deux points fixes.

La somme des carrés des côtés du triangle A'B'C' *est constante.*

Soient *(fig. 3)* a', b', c' les projections des sommets A', B', C' sur la droite Ij, j (*) étant le centre de gravité de A'B'C'. On sait que

$$(1) \qquad jc' = ja' + jb.$$

D'autre part, on a

Dans le triangle A'Ij, $r^2 = \overline{jA'}^2 + \overline{jI}^2 + 2jI.ja'$,

» C'Ij, $r^2 = \overline{jC'}^2 + \overline{jI}^2 - 2jI.jc'$,

» B'Ij, $r^2 = \overline{jB'}^2 + \overline{jI}^2 + 2jI.jb'$.

En ajoutant, et en tenant compte de la relation (1), on trouve

$$3r^2 = \overline{jA'}^2 + \overline{jC'}^2 + \overline{jB'}^2 + 3\overline{jI'}^2,$$

mais $\overline{j'A}^2 + \overline{jC'}^2 + \overline{jB'}^2 = \frac{3}{9}(\overline{A'C'}^2 + \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2)$,

d'où $\overline{A'C'}^2 + \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2 = 9(r^2 - \overline{jI}^2) = \text{const.}$

C. Q. F. D.

Enveloppe des côtés du triangle A'B'C'.

Les côtés A'B', B'C, A'C' sont perpendiculaires aux milieux

(*) Ce point j, sur la figure, a été inexactement placé; il est légèrement à droite du point I, et non à gauche.

des segments des hauteurs compris entre l'orthocentre fixe H le cercle I. Ces côtés sont donc tangents à une ellipse ayant pour foyers I et H, et le cercle I pour cercle directeur. Si le point H était extérieur au cercle I, l'enveloppe serait une hyperbole.

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$

ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. **A. Aubry.**

(*Suite*, voir page 54.)

---

8. II. — Soit la progression arithmétique de $m + 1$ termes, supposés croissants,

$b = a + r,\quad c = a + 2r,\quad d = a + 3r,\ \ldots\ l = a + mr = k + r$;

on a, d'après (1),

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} + \ldots + \frac{l}{k} > m\sqrt[m]{\frac{l}{a}}.$$

L'égalité $\frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} + \ldots + \frac{k}{k} = m,$

combinée avec l'inégalité précédente, donne

$$(\alpha)\qquad \frac{r}{a} + \frac{r}{b} + \frac{r}{c} + \ldots + \frac{r}{k} > m\left(\sqrt[m]{\frac{l}{a}} - 1\right).$$

De même, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \ldots + \frac{k}{l} > m\sqrt[m]{\frac{a}{l}}.$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{c} + \frac{d}{d} + \ldots + \frac{l}{l} = m;$$

d'où

$$(\beta)\qquad \frac{r}{b} + \frac{r}{c} + \frac{r}{d} + \ldots + \frac{r}{l} < m\left(1 - \sqrt[m]{\frac{a}{l}}\right).$$

Supposons $a = r = 1$, $k = m$, $l = m + 1$. En appelant H_m la somme des m premiers termes de la série harmonique, on tire, des inégalités (α), (β),

$$H_m > m\left(\sqrt[m]{m+1} - 1\right),\quad H_m + \frac{1}{m+1} - 1 < m\left(1 - \sqrt[m]{\frac{1}{m+1}}\right)$$

d'où

$$(4)\qquad m\left(\sqrt[m]{m+1} - 1\right) < H_m < m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{m+1}} + \frac{1}{m+1}\right)$$

(*Schlömilch.*)

9. III. — On a

$$\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}+\ldots+\frac{x+m+1}{x+m}>m\sqrt[m]{\frac{x+m+1}{x+1}},$$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\ldots+\frac{x+m-1}{x+m}>m\sqrt[m]{\frac{x}{x+m}},$$

relation due à Pascal *(Numericarum potestatum generalis resolutio)* (*).

On trouve très facilement, par le moyen de la formule de Cauchy, une limite du premier membre de (7), mais moins approchée. On a en effet

$$\frac{a}{a+1}+\frac{a+1}{a+2}+\ldots+\frac{a+m-1}{a+m}>m\sqrt[m]{\frac{a}{a+m}},$$

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+m}>m\sqrt[m]{\frac{1}{a+1}\,\frac{1}{a+2}\cdots\frac{1}{a+m}};$$

d'où, en additionnant et réduisant,

$$(8)\qquad \sqrt[m]{(a+1)\ldots(a+m)}>\frac{1}{1-\sqrt[m]{\dfrac{a}{a+m}}}.$$

(A suivre.)

VARIÉTÉS

LES PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE EN 1892

Par M. **Émile Vigarié.**

4. Triangles et quadrilatères. — Dans une Note *sur certaines séries de triangles et de quadrilatères* (*A. F.*, p. 38-66) M. E. Collignon a résolu le problème suivant :

Construire un triangle ABC, *connaissant les centres* A′,B′,C′ *des carrés construits extérieurement sur ses trois côtés.* Après avoir donné deux solutions, l'une géométrique, l'autre algébrique de cette question, l'auteur considère une série de triangles ainsi définie : on considère un triangle primitif ABC

(*) On peut donner une démonstration directe, très simple, de cette relation au moyen de la théorie des combinaisons. (Voir Desboves, *Étude sur Pascal*, et, au tome I de la *Nouvelle Correspondance*, un article de M. Mansion.

et l'on construit le triangle A'B'C' ayant pour sommets les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés de ABC. En répétant sur A'B'C' l'opération que l'on a faite sur ABC et en continuant de la même manière on obtient une série indéfinie de triangles. M. Collignon étudie les relations qui tient entre eux les éléments de ces triangles, il applique ensuite les résultats trouvés à un polygone de *n* côtés, puis enfin aux quadrilatères.

Nous avons étudié nous-même les propriétés des triangles podaires dans une Note intitulée : *Algunas propriedades de los triangulos podares* parue dans *El Progreso Matematico* (p. 97-105, 173-176). Cette Note donne aussi les principales propriétés des cercles de Schoute.

Nous devons aussi mentionner l'article de M. Bertrand *sur quelques propriétés du triangle* (*M.*, p. 130-134) qui donne quelques propositions se rapportant à la Géométrie du triangle.

5. Généralités. — Sous le titre : *Exercices divers*, M. Boutin a commencé, il y a quelques années, dans le *J. E.* et le *J. S.*, la publication d'une série de questions qui présentent le plus grand intérêt. Ces questions qui se rapportent aux diverses branches étudiées dans la Géométrie du triangle sont nombreuses et variées; elles sont suivies d'une indication de la solution — généralement analytique — et sont le fruit des recherches de l'auteur. Nos lecteurs les liront avec plaisir; il leur suffira de se reporter au *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, aux pages suivantes :

J. E., pp. 36-38, 69-70, 94-96, 113-115, 141-143, 156-159, 179-183, 230-233, 272-278, *(à suivre)*.

J. S., pp.88-90, 115-116, 164-166, *(à suivre)*.

M. E. Lemoine continue de contribuer aux progrès de la Géométrie du triangle par la publication d'un Mémoire sur *Divers résultats concernant la Géométrie du Triangle* (*A. F.*, pp. 130-159). Ce travail se rapporte à plusieurs questions, toutes fort intéressantes. Voici les titres des sujets qui y sont traités :

1° Sur les distances de divers points remarquables (pp. 130-135).

2° Construction de divers points remarquables. — Construction du point I : $p - a$, $p - b$, $p - c$ (pp. 135-136).

3° Étude d'une construction des points de contact des cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC avec le cercle de Feuerbach (pp. 136-139).

4° Points permutiens et semi-permutiens (pp. 139-147);

5° Lieux géométriques et propriétés diverses (pp. 147-158).

M. Zoel G. de Galdeano a continué, dans *El Progreso Matematico*, dont il est le directeur, la publication du résumé des principaux travaux se rapportant au triangle. Sa Note est intitulée : *La Evolucion de la Geometria del triangulo* (pp. 218-221).

Enfin M. Bénézech, dans une *Note de géométrie et de mécanique* (*J. E.*, pp. 107-110, 131-135) et dans les *Problèmes de la géométrie du tétraèdre* (*J. E.*, pp. 153-156), a donné plusieurs propositions nouvelles, dont quelques-unes ont trait à la Géométrie du triangle.

6. Points remarquables. — Nous n'avons pas, cette année, à enregistrer l'étude de nouveaux points remarquables du plan du triangle. Quelques nouvelles propriétés des points précédemment étudiés ont été données par Mme Prime : *Sur les points de Brocard* (*M.*, pp 194-196) et par M. Sollertinsky sur *Los centros de las parallelas iguales* (*Progreso mat.*, pp. 249-251).

Une Note bibliographique, relative à un problème de Fermat, (Centres isogones) a été donnée par M. Neuberg (*M.*, pp. 162-163). Nous avons complété cette Note par l'indication de quelques quelques sources nouvelles (*M.*, p. 274).

7. Coniques. — La détermination de l'expression du rayon de courbure, dans les coniques inscrites à un triangle de référence a fait l'objet d'une Note de M. G. de Longchamps (*A. F.*, pp. 11-23). Après avoir donné une démonstration fort simple de l'expression du rayon de courbure, M. de Longchamps donne une seconde solution, due à M. Demoulin.

M. Neuberg a réuni en une Note (*M.*, pp. 241-256) les principales propriétés de l'hyperbole de Kiepert. dont le but est de servir d'introduction à une Note analogue sur l'*hyperbole de Feuerbach*, due à M. Mandart et que *Mathesis* publiera ultérieurement.

Citons aussi le Mémoire *Beiträge zur Geometrie des Dreiecks*

dû à M. Jos. Hahn (*Programme Realschule zu Heppenheim*, 16 p.), qui contient de nombreuses propriétés du triangle, et dont plusieurs se rapportent aux coniques de Artzt et de Kiepert.

8. Cubiques. — L'étude des cubiques remarquables du plan du triangle est devenue plus intéressante grâce aux propriétés nouvelles qui ont été données par M[me] V[ve] Prime dans sa Note ayant pour titre : *Contribution à l'étude des cubiques* (*J. S.*, pp. 3-7, 25-30, 49-50, 71-77), et grâce aussi aux travaux de MM. Neuberg et Schoute. Le Mémoire publié par ces deux savants géomètres, intitulé : *Généralisation d'un problème connu* (*A. F.*, pp. 169-189) a pour objet la résolution de la question suivante:

On considère : 1° Les coniques S *circonscrites à un triangle* ABC *et telles que les normales d'angle* α ; *aux sommets* A, B, C *concourent en un point* P ; *2° Les coniques* S′ *inscrites au même triangle et telles que les normales d'angle* α, *aux points de contact des côtés concourent en un même point* P′.

Démontrer qu'une même cubique est à la fois le lieu de P *et de* P′; *qu'une autre cubique est à la fois le lieu des centres* O *et* O′, *des coniques* S *et* S′.

Ce problème intéressant contient une généralisation des cubiques étudiées dans ce Journal (*J. S.*, 1886), par M. Kœhler et par M. Taratte (pp. 169 et 186).

BIBLIOGRAPHIE

Traité de Mécanique, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique (*2e série*) et au baccalauréat de l'enseignement moderne (*3e série*) et des candidats à l'Institut agronomique, par E. CARVALLO, professeur agrégé de l'Université, docteur ès sciences mathématiques, examinateur d'admission à l'École Polytechnique (Librairie Nony et Cie, 17, rue des Ecoles).

Il y a quelques années, sous le titre *Leçons de Statique* (*), M. Carvallo avait publié une brochure fort intéressante, que nous avons nous-même

(*) Une nouvelle édition de cet ouvrage vient de paraître à la librairie Nony. Elle renferme une Note, ajoutée au texte de la première édition et dans laquelle la théorie des forces parallèles se trouve exposée en prenant pour point de départ les principes de la géométrie vectorielle. Certains, peut-être, lui préféreront celle que l'auteur expose au chapitre II du traité que nous analysons ici et qui paraît plus à la portée des élèves. Mais il est difficile de se prononcer sur la plus ou moins grande simplicité des démonstrations avant de les avoir soumises à l'expérience. Les plus courtes, malheureusement, ne sont pas toujours les meilleures.

eu le plaisir de citer dans l'opuscule sur la Mécanique, opuscule que nous avons inséré récemment dans la troisième édition du supplément à notre Cours de Mathématiques spéciales. Cette brochure fut, à son apparition, très remarquée des membres de l'enseignement. Elle méritait en effet cette attention, et le succès qu'obtint ce travail, d'apparence modeste, mais rempli d'idées originales, s'explique bien, quand on a creusé les démonstrations proposées par l'auteur.

En prenant pour base son premier ouvrage, M. Carvallo vient d'écrire un Traité de Mécanique à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires. A ses leçons de statique, reproduites en grande partie, et modifiées seulement en certains points, M. Carvallo a simplement ajouté quelques chapitres complémentaires, portant principalement sur la théorie des *machines simples*, et quand nous aurons ajouté que ce livre de 150 pages peut, en négligeant les *compléments* imprimés en petits caractères, être réduit à 80 pages pour le lecteur visant uniquement la préparation de son examen, on pourra se faire une idée générale du plan de cet ouvrage dont l'auteur a pu dire, avec raison, dans la préface qui l'accompagne, qu'il constitue « un manuel précieux pour l'examen ».

M. Carvallo, dans cette préface, veut bien faire appel aux critiques que pourra soulever son Traité de Mécanique. Me permettra-t-il, non pas une critique, mais l'expression d'un désir. J'ai trouvé, en le lisant, mais cette impression m'est peut-être personnelle et je ne la formule ici que pour le cas où elle lui serait adressée par d'autres lecteurs plus compétents; j'ai trouvé, dis-je, que certains passages étaient d'une lecture difficile. Une rédaction trop condensée nuit quelquefois à la clarté nécessaire et pour y suppléer le lecteur est obligé à quelque effort. Il serait facile, je crois, de remédier à l'inconvénient qui m'a frappé, s'il est réel, en retouchant quelques paragraphes des compléments. Cette observation ne s'adresse pas, dans tous les cas, aux autres parties de l'ouvrage dont la rédaction est parfaite et remarquablement claire.

Le livre de M. Carvallo sera lu avec un vif intérêt par les professeurs. Nous le recommandons à toute leur attention; ils auront à voir quelles sont, parmi les idées exposées, celles qui doivent pénétrer dans leur enseignement et sous quelle forme elles doivent être présentées à leurs élèves.

G. L.

Recueil de calculs logarithmiques à l'usage des candidats aux baccalauréats d'ordre scientifique et aux diverses écoles du gouvernement, etc..., par P. Barbarin, ancien élève de l'Ecole normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Bordeaux; librairie Nony.

Parmi les épreuves qui attendent les candidats aux écoles, il n'y en a pas dont ils négligent aussi parfaitement la préparation que celle du calcul pratique. Ils s'imaginent volontiers, ces candidats, qu'on apprend à calculer, à manier les tables, à disposer ses chiffres, en un instant, le jour même de la composition. C'est une grave erreur. En cela, comme en toutes choses, il faut de l'apprentissage ou, suivant le mot du jour, de l'entraînement. Le livre que vient de faire paraître M. Barbarin rendra grand service à ces candidats, s'ils veulent se soumettre à cet entraînement nécessaire. En refaisant quelques-uns des calculs indiqués, ils pourront constater les fautes qu'ils ont commises et ils pourront vite vérifier que ces fautes sont presque toujours *de même espèce.*

C'est que, en effet, chacun de nous possède au point de vue du calcul ce qu'on peut appeler un *coefficient personnel*, en vertu duquel nous avons tendance à commettre certaines erreurs, de préférence à d'autres. Ils pourront ainsi se corriger des défauts qu'ils se découvriront.

Ils apprendront aussi, en se reportant au livre de M. Barbarin, à bien disposer leurs calculs, à séparer nettement les calculs principaux des calculs auxiliaires, en mettant les données et les résultats à la place qu'ils doivent occuper, pour faciliter la lecture de leur travail au correcteur chargé de cette ingrate besogne. Je n'ignore pas que, pour négliger comme ils le font cette préparation du calcul logarithmique, ils plaident le grand argument du faible coefficient qui est attaché à cette composition. Mais aujourd'hui, plus que jamais, devant ce flot toujours croissant des candidats aux Écoles, n'est-ce pas commettre une faute que de négliger la moindre partie du programme auquel on est soumis? Combien ont réussi, laissant d'autres à la porte, qui n'ont eu sur ceux-ci d'autre supériorité que *d'avoir fait un bon triangle*; pour parler la langue de nos candidats!

G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Académie de Nancy.

1re session. — I. Dans un trièdre, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres, et la somme des trois faces est plus petite que quatre angles droits.

II. On donne un demi-cercle de diamètre AB et de rayon R et une droite CD perpendiculaire à AB, à la distance $AC = a$ du point A.

On demande de tracer par A une sécante qui coupe le demi-cercle en M et CD en N, et telle qu'en faisant tourner toute la figure autour de AB, la surface engendrée par l'arc AM, augmentée de la surface engendrée par NC, donne une somme égale à πm^2.

On prendra comme inconnue l'angle MAB, et l'on discutera.

2e session. — I. Connaissant la mesure du tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles, trouver celle du tronc de pyramide polygonal à bases parallèles.

II. Si l'on prend pour unité le demi-grand axe de l'orbite terrestre, le demi-grand axe de l'orbite de Jupiter est égal à 5.2. En conclure le nombre d'années sidérales que dure une révolution de Jupiter.

III. Étant donnée l'équation

$$(3 - m)x^2 - 4mx + 5(3 + m) = 0,$$

trouver entre quelles limites peut varier m pour que les racines soient réelles, positives et inférieures à 10.

Académie de Rennes.

1re session. — I. Établir les formules qui donnent $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.

II. Étant donnés un point P et une droite Px dont $PO = p$ est la distance à ce point, on mène par O une droite C'C de longueur $2d$, dont O est le milieu et qui fait avec la direction de Px l'angle α. On prend C, C' pour centres de deux circonférences; l'une de rayon r, l'autre de rayon r'.

Trouver sur Px un point X tel que si de ce point on mène une tangente XT à la circonférence r sa longueur XT soit moyenne proportionnelle entre les deux segments XM, XM′ que la circonférence r' détermine sur cette tangente. — Discussion.

2° *session*. — I. Théorèmes relatifs au volume du tronc de pyramide à bases parallèles : 1° triangulaires ; 2° polygonales.

II. Diviser $z^3 - 3z - 2$ par $z + 1$, et donner les racines de l'équation obtenue en égalant le premier de ces polynômes à zéro.

Chercher en utilisant ce résultat s'il est possible de trouver deux nombres x, y différents de zéro et tels que la racine cubique de la somme de leurs cubes soit le même nombre a que la racine carrée de la somme de leurs carrés.

3° *session*. — 1° Trouver l'expression du volume engendré par un triangle tournant autour d'une droite située dans son plan et passant par un de ses sommets sans traverser sa surface. Dans quelle position engendre-t-il le plus grand volume possible ?

2° Résoudre l'équation

$$a \cos x + b \cos (\alpha - x) = m,$$

Discussion, — valeurs limites de m ; a, b, α étant donnés.

Académie de Toulouse.

I. Définir l'angle trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné : réciprocité de la définition. Propriétés des faces et des angles de ces deux angles trièdres.

II. Soit ABC un triangle dont on désigne suivant l'usage, par A,B,C les angles.

On suppose $A > B > C$.

Soient H, H′, H″ les pieds des hauteurs abaissées respectivement des sommets A,B,C sur les côtés opposés BC, CA, AB et M, M′ M″ les milieux de ces côtés.

1° Démontrer les relations :

$$\frac{HM}{\sin (B - C)} = \frac{H'M'}{\sin (A - C)} = \frac{H''M''}{\sin (A - B)}.$$

2° Démontrer que l'on peut toujours construire un triangle ayant pour côtés les trois longueurs HM, H′M′, H″M″ et pour angles opposés à ces côtés $B - C$, $180° - (A - C)$, $A - B$.

3° Indiquer comment, connaissant les trois longueurs HM. H′M′ H″M″, on résoudra le triangle ABC.

QUESTION 348

Solution par M. B. Sollertinsky.

Dans tout triangle, la distance d, *du centre de gravité au point de Lemoine, vérifie l'égalité*

$$9d^2\left(\sum a^2\right)^2 = - \sum a^6 + 3\sum a^4b^2 - 15a^2b^2c^2.$$

(Aug. Poulain.)

α', β', γ' désignant les coordonnées barycentriques d'un point M', on a

$$\overline{M'M}^2 = \frac{\sum \alpha'\overline{AM}^2}{\sum \alpha'} - \frac{\sum a^2\beta'\gamma'}{\left(\sum \alpha'\right)^2}. \qquad (*)$$

Les coordonnées du point de Lemoine sont a^2, b^2, c^2; et, si le point M est le centre de gravité, on a

$$\overline{AM}^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}.$$

Par suite

$$9d^2\left(\sum a^2\right)^2 = \left(\sum a^2\right)\left(\sum a^2[2(b^2+c^2)-a^2]\right) - 27a^2b^2c^2.$$

Or, on a

$$\sum a^2[2(b^2+c^2)-a^2] = 4\sum a^2b^2 - \sum a^4;$$

puis

$$\left(\sum a^2\right)\left(\sum a^2b^2\right) = 3a^2b^2c^2 + \sum a^4b^2;$$

$$\left(\sum a^2\right)\left(\sum a^4\right) = \sum a^4b^2 + \sum a^6;$$

et enfin

$$9d^2\left(\sum a^2\right)^2 = -\sum a^6 + 3\sum a^4b^2 - 15a^2b^2c^2.$$

(*) On peut établir cette expression, due à Lagrange, en ne se servant que du théorème de Stewart. Voir, pour la méthode, *Cl. Thiry. Distances des points remarquables du triangle.*

Soit A' le pied de AM'. Puisqu'on a

$$\frac{AM'}{M'A'} = \frac{\beta'+\gamma'}{\alpha'},$$

le théorème de Stewart, appliqué au triangle AMA', donne

$$(1) \qquad \overline{MM'}^2 = \frac{\alpha'\overline{AM}^2 + (\beta'+\gamma')\overline{A'M}^2}{\alpha'+\beta'+\gamma'} - \frac{\alpha'(\beta'+\gamma')\overline{AA'}^2}{(\alpha'+\beta'+\gamma')^2}.$$

Ce même théorème, appliqué aux triangles BMC, ABC, donne

$$\overline{A'M}^2 = \frac{\beta'\overline{MB}^2 + \gamma'\overline{MC}^2}{\beta'+\gamma'} - \frac{\beta'\gamma' a^2}{(\beta'+\gamma')^2},$$

$$\overline{AA'}^2 = \frac{\beta' c^2 + \gamma' b^2}{\beta'+\gamma'} - \frac{\beta'\gamma' a^2}{(\beta'+\gamma')^2},$$

et la substitution dans (1) donne, après des réductions faciles

$$\overline{MM'}^2 = \frac{\Sigma\alpha'\overline{AM}^2}{\Sigma\alpha'} - \frac{\Sigma a^2\beta'\gamma'}{(\Sigma\alpha')^2}.$$

QUESTION 452

Solution par Mme Ve F. PRIME.

La somme algébrique des distances des trois sommets d'un triangle et de l'orthocentre, à une droite quelconque passant par le centre du cercle d'Euler, est nulle.

Soient A, B, C, H, A_1, A_2 les sommets du triangle de référence, l'orthocentre, le milieu de AH et le milieu de BC. Désignons par α, β, γ, x, α_1, α_2 les distances de ces points à une droite quelconque menée par le centre O_9 du cercle d'Euler.

Le point O_9 étant le milieu de la droite $A_1 A_2$,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Mais
$$\alpha_1 = \frac{\alpha + x}{2},$$

et
$$\alpha_2 = \frac{\beta + \gamma}{2},$$

on a donc bien
$$\alpha + \beta + \gamma + x = 0.$$

NOTA. — Autres solutions par MM. E. FOUCART, élève au lycée Michelet VAZOU; B. SOLLERTINSKY; GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille; A. DROZ-FARNY.

QUESTION 438 (*)

Solution par M. SVÉCHNICOFF, à Troïtzk (Russie).

Simplifier le polynôme

$$\begin{aligned}
&(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \ldots (1 - x^n) \\
+ \;& x(1 - x^2)(1 - x^3) \ldots (1 - x^n) \\
+ \;& x^2(1 - x^3)(1 - x^4) \ldots (1 - x^n) \\
+ \;& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
+ \;& x^n
\end{aligned}$$

(E. Catalan.)

Désignons les termes de ce polynôme par u_0, u_1, u_2, ... u_n. Alors on a

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 &= (1 - x^2)(1 - x^3) \ldots (1 - x^n) \\
u_0 + u_1 + u_2 &= (1 - x^3)(1 - x^4) \ldots (1 - x^n) \\
\ldots \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \ldots \\
u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} &= 1 - x^n \\
u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n &= 1.
\end{aligned}$$

NOTA. — Solutions diverses par MM. A. BOUTIN, FOUCART, élève au lycée Michelet; GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille; et Mme Ve F. PRIME. Nous avons reçu aussi une solution anonyme.

(*) Marquée 428, par erreur.

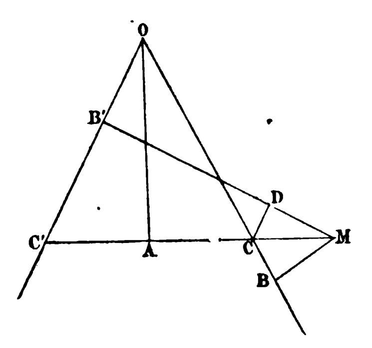
QUESTION 451

Solution par M. Ernest Foucart, au Lycée Michelet.

D'un point quelconque M *du plan d'un angle* BOB′ *égal à* 60°, *on abaisse les perpendiculaires* MB, MB′, MA *sur les côtés* OB, OB′, *et sur la bissectrice* OA *de cet angle. Démontrer que*

$$OA = MB' - MB. \qquad \text{(Lauvernay).}$$

1° Soient C et C′ les points de rencontre de MA avec OB et OB′.



Par le point C, menons la parallèle CD à OB′, qui coupe MB′ en D. Les triangles MBC, MDC sont évidemment égaux et l'on a

$$MD = MB.$$

D'où

$$MB' - MB = MB' - MD = DB'.$$

Or, DB′ est égal à la hauteur du triangle OCC′, issue de C. Et puisque le triangle OCC′ est équilatéral, ses hauteurs sont égales; d'où

$$D'B = OA,$$

ou

$$OA = MB' - MB.$$

2° Si M était à l'intérieur de BCB′, MB′ et MB ne seraient plus de même sens, et l'on aurait

$$OA = MB' + MB.$$

Nota. — Autres solutions par MM. A. Droz Farny; B. Sollertinsky; Lavieuville, professeur au collège de Dieppe et Mme Ve F. Prime.

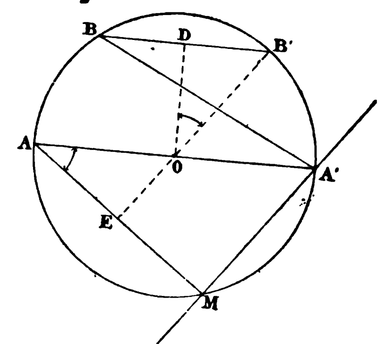
QUESTION 454

Solution par M. Ernest Foucard, élève au Lycée Michelet.

Etant donnée une circonférence de diamètre AA′, *on mène une corde quelconque* B′B *parallèle à ce diamètre; on prend la corde* AM, *double de la distance des deux parallèles* AA′, BB′. *Démontrer que l'angle* AA′C *est double de l'angle* AA′B, C *étant un point quelconque situé sur le prolongement de* MA′. (Lauvernay.)

Du centre O du cercle, menons la perpendiculaire OD sur

B et B'; de même, OE sur AM; les triangles rectangles ODB' et AOE sont égaux, car $AE = \frac{1}{2} AM = OD.AO = OB'$.



Il en résulte $\widehat{EAO} = \widehat{DOB'}$; par suite arc A'M = arc B'B.

D'autre part, on a

$$\widehat{AA'M} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A'M}),$$

$$\widehat{AA'B} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BB'}).$$

Il en résulte

$$\widehat{AA'M} = 2\widehat{AA'B}.$$

Remarque. — Pour que la proposition soit exacte, il faut que C soit sur la semi-droite A'M; sinon, on devrait prendre, dans l'énoncé, le supplément de AA'B.

NOTA. — Solution analogue par Mme Ve F. PRIME et par MM. VAZOU, professeur au collège de Falaise; A. DROZ-FARNY; B. SOLLERTINSKY.

QUESTION 453

Solution par M. LAVIEUVILLE, professeur au Collège de Dieppe.

Dans un triangle, toute hauteur φ_a *est moyenne harmonique entre les deux segments déterminés sur la perpendiculaire au côté correspondant* (la médiatrice) *à cette hauteur menée par le milieu de ce côté, par les deux autres côtés; ces segments ayant pour origine commune le point milieu.* (Lauvernay.)

Menons la parallèle KAA' à BC. Le point E étant le milieu de BC, le faisceau (A.KBEC) est harmonique; et il en est de même du faisceau (A.GA'FE). On a donc :

$$\frac{2}{EA'} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{EG},$$

ou $$\frac{2}{\varphi_a} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{EG}.$$

C. Q. F. D.

Autrement (*) :

(*) Cette solution est de M. Greenstreet.

On a $$\mathrm{FE} = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{C}, \qquad \mathrm{GE} = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{B};$$

la moyenne harmonique entre FE, GE est égale à

$$2\left(\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{C}\right)\left(\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{B}\right) : \frac{a}{2}\left(\mathrm{tg}\,\mathrm{B} + \mathrm{tg}\,\mathrm{C}\right) = a \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} : \sin \mathrm{A}$$
$$= b \sin \mathrm{C} = \mathrm{AD} = \varphi_a.$$

NOTA. — Solution diverses par MM. VAZOU, professeur au collège de Falaise; E. FOUCART, élève au lycée Michelet; GROLLEAU; A. DROZ-FARNY; B. SOLLERTINSKY; et par Mme Ve F. PRIME.

QUESTIONS PROPOSÉES

492. — Donner le nombre des chiffres de la suite naturelle des nombres de 1 jusqu'à $(10^m - 1)$ inclusivement.

(B. Sollertinsky.)

493. — Deux circonférences Δ, Δ', se coupent aux points M, M'. Trois cordes MA, MB, MC du cercle Δ rencontrent Δ' respectivement en A', B', C'. Démontrer que les circonférences AA'M', BB'M', CC'M' se coupent deux à deux en des points situés sur une droite. *(B. Sollertinsky.)*

RECTIFICATIONS

1° Dans l'énoncé de la question 484 au lieu de ACB', ABC' il faut lire ACC', ABB'.

2° Dans l'énoncé de la question 487 j'ai oublié de dire que q était un nombre entier inférieur à $p-1$. *G. L.*

Page 49, ligne 1, *lire* VW' *au lieu* de V'W.

Page 50, ligne 13, *lire* $\frac{R'}{R}$ *au lieu* de $\frac{R}{R}$.

Page 51, ligne 6, *lire* intérieur *au lieu* de inférieur.

Page 70, ligne 7, *au lieu de* doubles produits *lire* produits deux à deux.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7076-3-93.

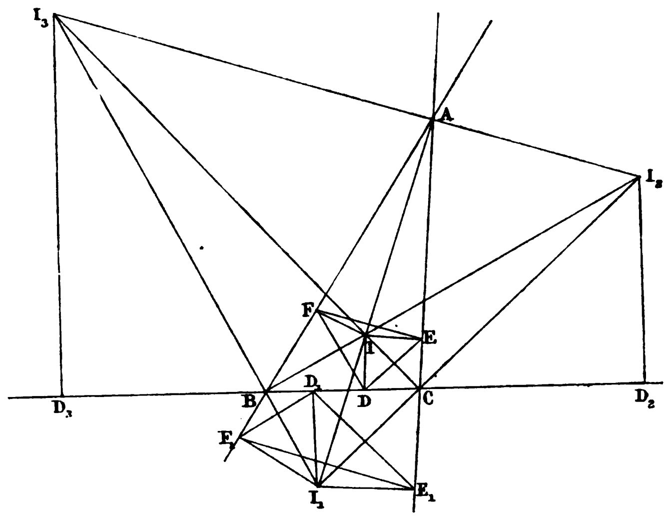
NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **J. Mackay**, professeur à l'Université d'Edimbourg.

NOTATIONS

I, I_1, I_2, I_3 sont les centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle fondamental ABC.

Les points de contact de ces cercles, avec les côtés



BC, CA, AB sont désignés par les lettres :

D, E, F ; D_1, E_1, F_1 ; D_2, E_2, F_2 ;
D_3, E_3, F_3.

Les côtés des quatre triangles DEF, $D_1E_1F_1$, $D_2E_2F_2$, $D_3E_3F_3$, forment avec les côtés de ABC

douze triangles			dont les orthocentres sont :		
AEF,	BFD,	CDE	H_1,	H_2,	H_3
AE_1F_1,	BF_1D_1,	CD_1E_1	H_1',	H_2',	H_3'
AE_2F_2,	BF_2D_2,	CD_2E_2	H'',	H_2'',	H_3''
AE_3F_3,	BF_3D_3,	CD_3E_3	H_1''',	H,	H_3'''.

PROPRIÉTÉS

(1) Les douze orthocentres sont situés deux à deux sur les six droites

$$II_1,\quad II_2,\quad II_3,\quad I_2I_3,\quad I_3I_1,\quad I_1I_2.$$

(2) Les quatre triangles

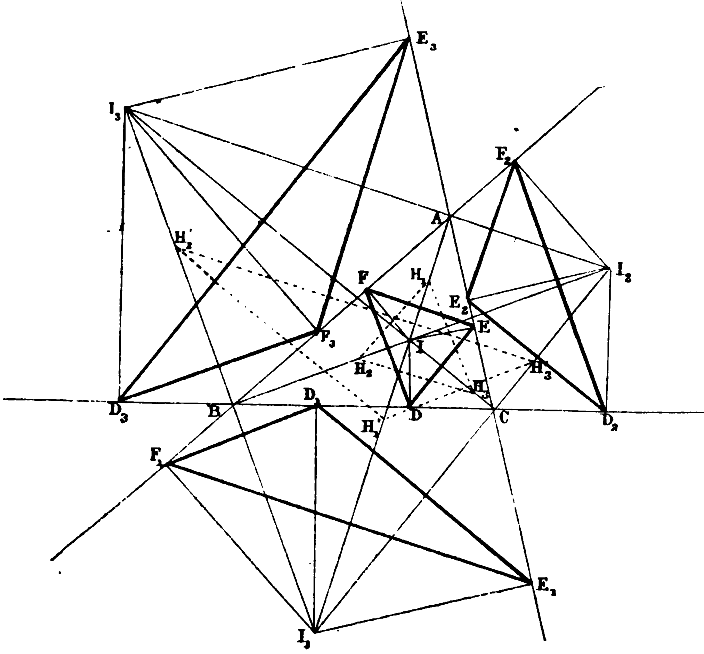
$$H_1H_2H_3,\quad H'_1H'_2H'_3,\quad H''_1H''_2H''_3,\quad H'''_1H'''_2H'''_3$$

sont égaux et opposés aux quatre triangles

$$DEF,\quad D_1E_1F_1,\quad D_2E_2F_2,\quad D_3E_3F_3.$$

(3) Les figures suivantes sont des losanges

DH_3EI,	EH_1FI,	FH_2DI
$D_1H'_3E_1I_1$,	»	»
$D_2H''_3E_2I_2$,	»	»
$D_3H'''_3E_3I_3$.	»	»



don les côtés sont r, r_1, r_2, r_3 respectivement.

(4) Les figures suivantes sont des hexagones équilatéraux :

$DH_3EH_1FH_2$, $D_1H'_3E_1H'_1F_1H'_2$, $D_2H''_3E_2H''_1F_2H''_2$, $D_3H'''_3E_3H'''_1F_3H'''$

dont les périmètres sont $6r$, $6r_1$, $6r_2$, $6r_3$ respectivement.

(5) I, I_1, I_2, I_3

qui sont les centres des cercles circonscrits aux triangles

DEF, $D_1E_1F_1$, $D_2E_2F_2$, $D_3E_3F_3$

sont les orthocentres des triangles

$H_1H_2H_3$, $H'_1H'_2H'_3$, $H''_1H''_2H''_3$, $H'''_1H'''_2H'''_3$.

(6) Si H_0, H'_0, H''_0, H'''_0

sont les orthocentres des triangles

DEF, $D_1E_1F_1$, $D_2E_2F_2$, $D_3E_3F_3$.

Ces points seront les centres des cercles circonscrits aux triangles

$H_1H_2H_3$, $H'_1H'_2H'_3$, $H''_1E''_2H''_3$, $H'''_1H'''_2H'''_3$.

(7) $H_0H_1 = H_0H_2 = H_0H_3 = ID = IE = IF = r$,

et ainsi de suite.

(8) Les figures suivantes sont des parallélogrammes

DIH_1H_0, EIH_2H_0, FIH_3H_0

et ainsi de suite.

(9) Le centre de similitude de DEF, $H_1H_2H_3$ est le point milieu de IH_0, et ainsi de suite.

(10) Les figures suivantes sont des losanges

$DH_3H_0H_2$, $EH_1H_0H_3$, $FH_2H_0H_1$

dont les côtés sont r, et ainsi de suite.

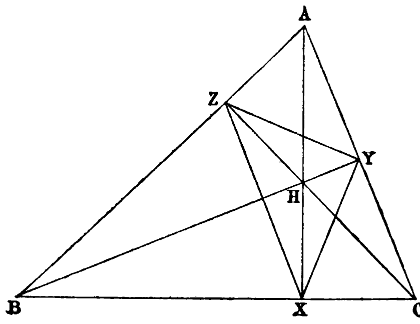
(11) Si des points H_1 H_2 H_3,

on abaisse des perpendiculaires sur

BC, CA, AB,

ces perpendiculaires concourent en H_0.

(12) Si, des points H_1, H_2, H_3, I on abaisse des perpendiculaires sur BC, la première est égale à la somme des trois autres.



(13) Les triangles DEF, $H_1H_2H_3$ ont même cercle des neuf points.

(14) Dans le triangle DEF

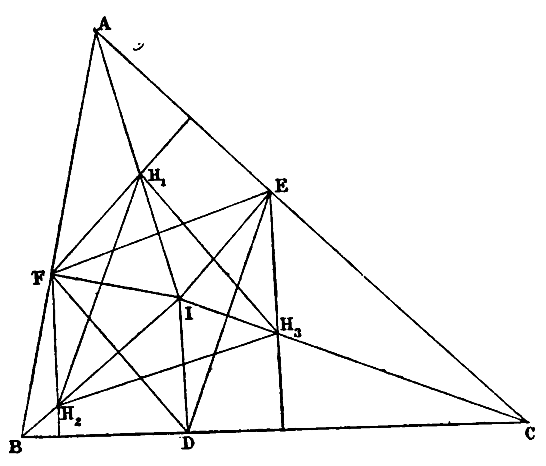
$$\left.\begin{matrix} DI , DH_0 \\ EI , EH_0 \\ FI , FH_0 \end{matrix}\right\} \text{ sont des droites isogonales par rapport à } \left\{\begin{matrix} D \\ E \\ F \end{matrix}\right.$$

(15) Dans le triangle $H_1H_2H_3$

$$\left.\begin{matrix} H_1I , H_1H_0 \\ H_2I , H_2H_0 \\ H_3I , H_3H_0 \end{matrix}\right\} \text{ sont des droites isogonales par rapport à } \left\{\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{matrix}\right.$$

(16) $AH_1 + BH_2 + CH_3 = 2(R - \rho)$,

où R désigne le rayon du cercle circonscrit à ABC



et ρ désigne le rayon du cercle inscrit à XYZ *(fig. 3)*.

Notations *(fig. 3)* :

$AH = h'_1$ $BH = h'_2$ $CH = h'_3$; $HX = h''_1$, $HY = h''_2$, $HZ = h''_3$,

(17) $$2R(AH_1 + BH_2 + CH_3) = h'^2_1 + h'^2_2 + h'^2_3,$$

(18) $$BH_2.CH_3 + CH_3.AH_1 + AH_1.BH_2 = h''^2_1 + h''^2_2 + h''^2_3,$$

(19) $$AH_1.BH_2.CH_3 = h''_1 h''_2 h''_3.$$

(20) $$YH_1 + ZH_2 + XH_3 = ZH_1 + XH_2 + YH_3, \\ = h''_1 + h''_2 + h''_3.$$

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$ ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. A. Aubry.

(*Suite*, voir page 84.)

IV. — Puissances et racines.

1° Dans la relation fondamentale, faisons 1° $a = 1 + x$, $b = 1$ (x positif quelconque); 2° $a = 1$, $b = 1 - x$ (x compris entre 0 et 1), on trouve

$$\frac{(1 + x)^m - 1}{x} > m > \frac{1 - (1 - x)^m}{x},$$

d'où

$$(\alpha) \qquad (1 \pm x)^m > 1 \pm mx,$$

où x est positif, et en outre inférieur à 1, dans le cas où l'on prend les signes inférieurs (*).

d'où, en additionnant,

$$(5) \qquad 2 > \sqrt[m]{\frac{x + m + 1}{x + 1}} + \sqrt[m]{\frac{x}{x + m}}.$$

Ainsi, pour $x = 1$, $m = 1000$, on trouve

$$\sqrt[1000]{\frac{1002}{2}} + \sqrt[1000]{\frac{1}{1001}} = 1.99937 < 2.$$

(*) Voici une autre démonstration tout aussi élémentaire.

Soient m nombres $a, b, c, \ldots k, l$, qu'on suppose compris entre 0 et 1 si l'on prend les signes inférieurs, positifs quelconques avec les signes supérieurs, on a

$$(1 \pm a)(1 \pm b) = 1 \pm (a + b) + ab > 1 \pm (a + b).$$

On a de même

$$(1 \pm a)(1 \pm b)(1 \pm c) > [1 \pm (a + b)][1 \pm c] > 1 \pm (a + b + c)$$

puis

$$(1 \pm a)(1 \pm b)(1 \pm c)(1 \pm d) > 1 \pm (a + b + c + d)$$

. . . .

$$(\alpha') \quad (1 \pm a)(1 \pm b) \ldots (1 \pm k)(1 \pm l) > 1 \pm (a + b + \ldots + k + l).$$

Si nous posons $a = b = c = \ldots = k = l = x$, il vient comme plus haut

$$(1 \pm x)^m > 1 \pm mx.$$

La formule (α') peut être utilisée pour la démonstration élémentaire de nombreux théorèmes. Elle eût pu nous servir de point de départ, car, comme on le verra plus loin, la relation fondamentale s'en déduit comme un corollaire naturel.

Posons :

$$F(x) = \sqrt[m]{x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1)},$$

nous aurons

$$\frac{[F(x+1)]^m - [F(x)]^m}{m[F(x+1)]^{m-1}} < F(x+1) - F(x) < \frac{[F(x+1)]^m - [F(x)]^m}{m[F(x)]^{m+1}}.$$

Or,

$$\frac{[F(x+1)]^m - [F(x)]^m}{m} = \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+m) - x(x+1)\dots(x-m-1)}{m}$$

$$= (x+1)(x+2)\dots(x+m-1)\frac{x+m-x}{m} = (x+1)(x+2)\dots(x+m-1).$$

Ainsi la valeur de $F(x-1) - F(x)$ est comprise entre les expressions suivantes :

$$\sqrt[m]{\frac{(x+1)^m \dots (x+m-1)^m}{(x+1)^{m-1}\dots(x+m)^{m-1}}} = \sqrt[m]{\frac{(x+1\dots(x+m-1)}{(x+m)^{m-1}}}$$

$$= \sqrt[m]{\left(1 - \frac{m-1}{x+m}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{x+m}\right)},$$

$$\sqrt[m]{\frac{(x+1)^m \dots (x+m-1)^m}{x^{m-1}\dots(x+m-1)^{m-1}}} = \sqrt[m]{\frac{(x+1)\dots(x+m-1)}{x^{m-1}}}$$

$$= \sqrt[m]{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\dots\left(1 + \frac{m-1}{x}\right)}.$$

Quand x tend vers l'infini, ces deux limites tendent simultanément vers l'unité; donc, x *variant de* o *à* ∞, *la valeur de l'expression* $F(x+1) - F(x)$ *varie de* $\sqrt[m]{1.2.3\dots m}$ *à* 1. *Elle diminue constamment quand* x *augmente :* en effet, multiplions par $\sqrt[m]{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}$ les deux membres de (5) : il vient, en transposant certains termes,

$$F(x+1) - F(x) > F(x+2) - F(x+1).$$

On peut ainsi poser la relation nouvelle

$$(6) \quad \sqrt[m]{(x+1)\dots(x+m)} - \sqrt[m]{x\dots(x+m-1)} > 1.$$

Faisons successivement $x = 1, 2, 3, \dots a$, puis additionnons ; nous trouvons

$$(7) \quad \sqrt[m]{(a+1)\dots(a+m)} > a + \sqrt[m]{1.2.3\dots m},$$

Changeons x en $\frac{x}{m}$, il viendra

$$(\beta) \quad \left(1 \pm \frac{x}{m}\right)^m > (1 \pm x), \qquad \text{d'ou} \qquad \sqrt[m]{1 \pm x} < 1 \pm \frac{x}{m}.$$

Dans les relations (α) et (β), changeons x en $\frac{x}{1 \mp x}$, il vient :

$$\frac{1}{(1 \mp x)^m} > \frac{1 \pm (m-1)x}{1 \mp x},$$

$$\frac{1}{\sqrt[m]{1 \mp x}} < 1 \pm \frac{x}{m(1 \mp x)} < \frac{1}{1 \mp \frac{x}{m(1 \mp x)}}$$

puisque, de $1 - \alpha^2 < 1$, on tire $1 \pm \alpha < \frac{1}{1 \mp \alpha}$. Les inégalités qui précèdent peuvent s'écrire :

$$(\gamma) \qquad (1 \mp x)^m < \frac{1 \mp x}{1 \pm (m-1)x} = 1 \mp \frac{mx}{1 \pm (m-1)x},$$

$$(\delta) \qquad \sqrt[m]{1 \mp x} > 1 \mp \frac{x}{m(1 \mp x)}.$$

On peut donc poser, x désignant maintenant un nombre plus grand que -1,

$$(2) \qquad 1 + mx < (1 + x)^m < 1 + \frac{mx}{1 - (m-1)x},$$

$$(3) \qquad 1 + \frac{x}{m} > \sqrt[m]{1 + x} > 1 + \frac{x}{m(1 + x)}.$$

11. — La relation (3) peut être utilisée pour l'extraction des racines des nombres très voisins de l'unité, car la différence

$$\left[1 + \frac{x}{m}\right] - \left[1 + \frac{x}{m(1+x)}\right],$$

est d'autant plus faible que x est plus petit.

Soit, par exemple, $m = 129$, $x = 0{,}0037$, on aura

$$1 + \frac{0.0037}{129} > \sqrt[129]{1.0037} > 1 + \frac{0.0037}{129.1.0037},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$1{,}00002868 > \sqrt[129]{1.0037} > 1.00002857.$$

La racine cherchée est donc, approximativement, égale à 1.0000286.

12. — Prenons, pour valeur de $\sqrt[m]{1 + x}$, la moyenne arithmétique des deux limites qui la comprennent; l'erreur ε sera inférieure à la demi-différence de ces mêmes limites. Donc en posant

$$(4) \qquad \sqrt[m]{1 + x} = 1 + \frac{x}{2m}\,\frac{2 + x}{1 + x},$$

on aura

$$(5) \qquad \varepsilon < \frac{x^2}{2m(1+x)},$$

ce qui fait voir que si x^2 est notablement inférieur à l'unité, la formule (4) sera fort approchée.

On peut utiliser cette formule pour l'extraction approchée des racines de degré quelconque. Changeons x en $\frac{h}{a^m}$, h étant supposé $< a^m$, en valeur absolue.

En posant $a^m + h = A$, on a

$$(6) \qquad \sqrt[m]{A} = a + \frac{h(A + a^m)}{2mAa^{m-1}}.$$

D'après cela,

$$(7) \qquad \varepsilon < \frac{h^2}{2mAa^{m-1}}.$$

Soit à extraire la racine m^e *du nombre* A; *cherchons la puissance* a^m *la plus voisine, et appelons* h *la différence positive ou négative* $A - a^m$. *La formule* (6) *donnera la racine avec une erreur inférieure à* ε.

Par exemple, soit $A = 60$, $m = 3$. On a $a^3 = 64$, $a = 4$, $h = -4$, d'où

$$\sqrt[3]{60} = 4 - \frac{4.124}{2.3.60.16} = 3.91389,$$

avec une erreur inférieure à

$$\frac{16}{2.3.64.60} = 0.00278.$$

En effet, le calcul direct donne

$$\sqrt{60} = 3.91487;$$

l'erreur, comme on le voit, est égale à 0.00098.

13. — Soient p, q deux nombres entiers, positifs; soit $p > q$. Le nombre $p - q$ étant entier et positif, on a d'après (δ) et (α)

$$(\sqrt{1+x})^{p-q} > \left(1 + \frac{x}{q(1+x)}\right)^{p-q} > 1 + \frac{p-q}{q}\frac{x}{1+x}.$$

Multipliant par la quantité positive $1 + x$, il vient

$$(8) \qquad (1+x)^{\frac{p}{q}} > 1 + \frac{p}{q}x.$$

Changeons x en $\frac{qx}{p}$, cette relation devient

(9) $$(1+x)^{\frac{q}{p}} < 1 + \frac{qx}{p}.$$

Ainsi, m *désignant un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, on a*

(10) $$(1+x)^m \gtrless 1 + mx,$$

suivant qu'on a $m \gtrless 1$.

Les formules (2) et (3), qui sont de simples transformations de la formule (α), ont donc encore lieu pour m positif quelconque, en changeant toutefois les signes $>$ en $<$ ou réciproquement, quand m est < 1.

14. — D'après (10) on a pour m positif quelconque et pour $x > -1$,

(α) $$\frac{(1+x)^m - 1}{x} \gtrless m,$$

(β) $$\frac{1-(1-x)^m}{x} \gtrless m.$$

Changeons x en $\frac{a-b}{a}$, dans (α); et x en $\frac{a-b}{b}$ dans(β), ces deux relations donnent

(11) $$ma^{m-1} \gtrless \frac{a^m - b^m}{a-b} \gtrless mb^{m-1}.$$

Ainsi *la relation fondamentale a lieu quel que soit le nombre positif* m; *mais en changeant toutefois le sens de l'inégalité, si* m *est plus petit que l'unité.*

Par exemple, soit $a = 1 + x$, $b = x$, $m = \frac{1}{2}$; on aura

$$\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} < \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{(1+x)-x} < \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

relation démontrée au n° 4 de deux manières différentes. On remarquera d'ailleurs que la première méthode, employée au n° 4 donne l'extension de la formule fondamentale, au cas de l'exposant $\frac{1}{m}$, m entier positif. En effet, on a dans le cas de $a > b$ et de m entier positif,

$$\frac{a^{-(m-1)}}{m} < \frac{a-b}{a^m - b^m} < \frac{b^{-(m-1)}}{m}.$$

Soient $a^m = \alpha$, $b^m = \beta$;

d'où $a = \sqrt[m]{\alpha}, \qquad b = \sqrt[m]{\beta}$;

on a

(12) $$\frac{1}{m}\alpha^{\frac{1}{m}-1} < \frac{\alpha^{\frac{1}{m}} - \beta^{\frac{1}{m}}}{\alpha - \beta} < \frac{1}{m}\beta^{\frac{1}{m}-1}.$$

15. — D'après (11) on a, pour $a > b$, m étant quelconque mais *plus grand que* 1 :

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a-b} > mb^{m-1}.$$

Changeons a en $\frac{1}{a}$ et b en $\frac{1}{b}$, cette relation deviendra, après quelques transformations,

$$\frac{m}{a^m b} < \frac{a^{-m} - b^{-m}}{b - a} < \frac{m}{ab^m}.$$

Or $a^{m+1} > a_m b \quad , \quad ab^m > b^{m+1}$;

on a donc $$\frac{m}{a^{m+1}} < \frac{a^{-m} - b^{-m}}{a - b} < \frac{m}{b^{m+1}},$$

ou, en changeant les signes,

$$-ma^{-m-1} > \frac{a^{-m} - b^{-m}}{a - b} > -mb^{-m-1}.$$

Si m est plus petit que 1, on changera le sens du signe $>$.

En résumé, *quel que soit* m, *pourvu que les nombres* a, b *soient tous deux positifs, ou tous deux négatifs,* on a

(13) $$ma^{m-1} \gtrless \frac{a^m - b^m}{a - b} \gtrless mb^{m-1}.$$

Nous sommes donc parvenu à donner à la relation fondamentale (13), toute la généralité dont elle est susceptible.

16. — Les relations qui précèdent en entraînent plusieurs autres, parmi lesquelles nous citerons les suivantes :

Changeons x en qx dans (8) : il vient, si qx surpasse -1,

(14) $$(1 + qx)^p > (1 + px)^q.$$

Dans la même formule (8), changeons x en $\frac{x}{p}$ et élevons à la puissance $\pm q$, nous trouvons

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^{\pm p} \gtrless \left(1 + \frac{x}{q}\right)^{\pm q}.$$

Elevons les deux membres de (14) à la puissance deuxième,

à la troisième, ... à la $(n-1)^{\text{ième}}$, et additionnons, il vient

$$\frac{(1+qx)^{np}-1}{q} > \frac{(1+px)^{nq}-1}{p}.$$

Dans ces trois formules, on doit supposer

$$p > q > 0.$$

Pour $m > 1$ et $x > 1$, on a

$$(1+x)^m > 1+mx, \qquad (1-x)^m > 1-x.$$

Faisons $x = \frac{h}{a}$ et additionnons : il vient

$$(a+h)^m + (a-h)^m > 2a^m,$$

relation qui a lieu quels que soient les nombres a, h, m, pourvu qu'on ait $a > h$, $m > 1$.

On trouvera de la même manière

$$\sqrt[m]{1+\omega} + \frac{1}{\sqrt[m]{1+\omega}} > 2 > \sqrt[m]{1+\omega} + \sqrt[m]{1-\omega}$$

ω étant compris entre zéro et l'unité et m surpassant 1.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 83.)

259 (*). — *Dans un triangle on a (en posant* $\delta = 4R + r$*).*

$$\sum \text{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{\delta^2}{p^2} - 2,$$

$$\sum \text{tg}^3 \frac{A}{2} = \frac{\delta^3 - 12Rp^2}{p^3},$$

$$\sum \text{tg}^4 \frac{A}{2} = \frac{\delta^4}{p^4} - \frac{16R\delta}{p^2} + 2,$$

. . . .

$$\sum \text{cotg}^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2 - 2r\delta}{r^2},$$

$$\sum \text{cotg}^3 \frac{A}{2} = \frac{p^3 - 12RS}{r^3},$$

. . . .

$$\sum \text{tg}^n \frac{A}{2} = \frac{\delta}{p} \sum \text{tg}^{n-1} \frac{A}{2} - \sum \text{tg}^{n-2} \frac{A}{2} + \frac{r}{p} \sum \text{tg}^{n-3} \frac{A}{2},$$

(*) Les exercices 249 à 258 ont été publiés dans le *Journal de M. S.*, pages 44, 68, 83, 133.

$$\sum \operatorname{cotg}^n \frac{A}{2} = \frac{p}{r} \sum \operatorname{cotg}^{n-1} \frac{A}{2} - \frac{\delta}{r} \sum \operatorname{cotg}^{n-2} \frac{A}{2} + \frac{p}{r} \sum \operatorname{cot}^{n-3} \frac{A}{2}$$

On déduit ces formules de l'équation

$$X^3 - \frac{\delta}{p} X^2 + X - \frac{r}{p} = 0,$$

qui a pour racines $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

260. — *Soit* M *un point,* (α, β, γ) *ses coordonnées barycentriques,* M′, M″, M‴ *les points algébriquement associés. — Aire du triangle* M′, M″, M‴ ?

On trouve

$$S_1 = \frac{4S\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \gamma - \alpha)}.$$

On peut en déduire certains résultats connus :

Si M coïncide, successivement, avec les points G, I, K, on a

$$S_1 = 4S, \qquad S_1 = 2pR \qquad S_1 = \frac{S}{2 \cos A \cos B \cos C}.$$

261. — *Soit* M *un point du plan d'un triangle,* A_1, B_1, C_1 *les points d'intersection de* AM, BM, CM, *avec les côtés,* A_1' *le conjugué harmonique de* A_1 *par rapport à* BC, *etc...* V, V′, V″ *les angles* A_1AA_1',... $(\alpha, \beta, \gamma)(x, y, z)$ *étant les coordonnées barycentriques et normales de* M.

Démontrer que :

1° $$\sum \alpha \operatorname{cotg} V = 0 \qquad \sum \frac{a}{x} \operatorname{cotg} V = 0.$$

2° *Les angles* V, V′, V″ *ne changent pas quand, au point* M, *on substitue son inverse* M_2.

3° *Le lieu des points* M, *tels que* $\Sigma \operatorname{cotg} V = 0$ *est la cubique des inverses relative au centre de gravité :*

$$\sum \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0.$$

On trouve aisément, $\operatorname{cotg} V = \dfrac{y^2 - z^2}{2yz \sin A}$.

262. — *Lieu géométrique des points tels que* M, M_0, M_2 *soient en ligne droite.*

On trouve (voir E. Lemoine, *A.-F.* Congrès de Paris 1889) :

$$\sum \alpha^2(b^2 - c^2) = 0.$$

Hyperbole équilatère, conjuguée par rapport au triangle de référence :

elle passe par les sommets du triangle A'B'C' qui a pour côtés les parallèles aux côtés du triangle de référence, menées par les sommets. Si l'on prend ce triangle pour triangle de référence, l'équation devient

$$\sum \frac{b^2 - c^2}{\alpha} = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît l'hyperbole de Kiepert de A'B'C'; ce qui caractérise complètement la courbe.

263. — *Soient un triangle* ABC*;* M *un point quelconque de son plan;* A_1, B_1, C_1 *les symétriques de* A, B, C, *par rapport à* M. *Démontrer que : 1° Les quatre circonférences* ABC, AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, *se coupent en un point* P; *2° Les quatre circonférences* $A_1B_1C_1$, A_1BC, AB_1C, ABC_1 *se coupent également en un même point* P' *symétrique de* P *par rapport à* M.

1° Des considérations géométriques élémentaires permettent de vérifier la proposition énoncée.

2° Toute la figure admet M, comme centre de symétrie.

Si M est un point remarquable de ABC, P et P' sont également des points remarquables de ABC.

Exemple : si M est le centre de gravité G, P est le point de Steiner (propriété bien connue).

264. — *Lieu du point de Lemoine des triangles qui ont même base* AB *et même hauteur?*

En coordonnées cartésiennes, les axes étant AB et la perpendiculaire en son milieu, on a :

$$h^2x^2 + y^2(3a^2 + 4h^2) - 2a^2hy = 0;$$

ce qui représente une ellipse tangente au milieu du côté donné.

265. — α, β, γ, *étant les coordonnées barycentriques d'un point, trouver les coordonnées barycentriques* α_1, β_1, γ_1, *du même point par rapport au triangle* $A_1\ B_1\ C_1$ *obtenu en menant au cercle circonscrit des tangentes, par les milieux des arcs* BC, CA, AB.

On trouve aisément :

$$\alpha : \beta : \gamma = p\alpha_1 - a \sin^2 \frac{A}{2} (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) : \ldots.$$

on en déduit :

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha + \sin A . \sin^2 \frac{A}{2} . \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2 \sin A \sin B \sin C} : \ldots.$$

On peut remarquer que le centre d'homothétie des triangles ABC, $A_1\ B_1\ C_1$, est l'inverse ν_1 du point de Nagel pour chacun d'eux.

BIBLIOGRAPHIE

Les lieux géométriques en géométrie élémentaire, par M. P. SAUVAGE, Professeur de Mathématiques (Saint-Cyr) au Lycée de Montpellier. Un volume in-8°, avec 47 figures; 1893. — Prix : 3 francs. — (Librairie Gauthier-Villars).

Cet ouvrage a pour objet de donner aux élèves des idées générales sur les lieux géométriques, et en même temps de résumer, en un petit nombre de méthodes simples, facilement assimilables, les procédés auxquels la plupart n'arrivent qu'après un temps assez long, par tâtonnements, un peu au hasard.

Des exemples sont développés à l'appui de chaque méthode. Un dernier chapitre est consacré à l'emploi des lieux géométriques dans les problèmes graphiques.

Tel qu'il est, l'ouvrage pourra, croyons-nous, rendre de notables services aux élèves se préparant aux baccalauréats et aux Écoles du Gouvernement.

Le but principal de cette étude est de ramener à un petit nombre de méthodes simples les procédés appliqués le plus souvent dans la recherche des lieux géométriques qui ne dépendent que de la géométrie élémentaire. Les élèves qui posséderont bien ces méthodes y trouveront non pas un moyen assuré d'arriver au résultat, dans tous les cas, mais un guide pour la voie dans laquelle il convient de chercher; on sait quel embarras éprouvent à ce point de vue ceux qui n'ont pas acquis déjà une certaine expérience.

L'ouvrage est divisé en cinq chapitres. Le premier est consacré aux considérations générales d'où l'on déduit les notions de lieux géométriques de lignes dans l'espace et d'enveloppes.

Le deuxième passe en revue les méthodes générales dites : des points remarquables (considérations de symétrie, points à l'infini), des substitutions successives, de translation parallèle, de rotation, des projections.

Dans le troisième sont résumés les lieux géométriques très nombreux que l'on rencontre dans le cours, ou qui s'en déduisent immédiatement, mais sans qu'aucune démonstration y soit développée.

Le quatrième est réservé au développement de quelques exemples et à l'indication sommaire de quelques autres. Les exemples choisis pour la méthode des projections se rapportent tous aux sections coniques.

Enfin le cinquième est réservé aux applications des lieux géométriques dans les problèmes graphiques.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(PARIS, SESSION D'AVRIL 1893).

(15 avril).

Mathématiques. — 1° Étant donnée une circonférence de rayon R, inscrire dans cette circonférence un trapèze de périmètre donné $2p$, dont l'un des côtés parallèles soit égal au diamètre de la circonférence.

2° Lune. — Révolutions sidérale et synodique. Orbite décrite par la Lune autour de la Terre.

Physique. — 1° Un instrument est composé d'une lentille convergente et d'une lentille divergente ayant leurs axes principaux confondus et placées à 10^{cm} l'une de l'autre. La lentille convergente a 12^{cm} de distance focale et la lentille divergente 2^{cm}.

En plaçant l'œil du côté de la lentille convergente, on regarde à travers l'instrument un objet situé assez loin pour être considéré comme étant à l'infini.

Si l'œil est normal, c'est-à-dire capable de voir net jusqu'à l'infini, pourra-t-il voir nettement l'objet lointain à travers l'instrument ?

Cet objet sera-t-il vu droit ou renversé ?

Quel sera le rapport du diamètre apparent de l'objet vu à travers l'instrument au diamètre apparent de l'objet vu à l'œil nu ?

2° Principe de Watt ou de la paroi froide

(20 avril).

Mathématiques. — 1° Étant donné un triangle ABC, mener extérieurement au triangle, dans son plan, une parallèle DD' au côté BC à une distance x telle que si l'on fait tourner le triangle autour de DD', l'aire décrite par BC soit moyenne proportionnelle entre les aires décrites par les deux autres côtés.

2° Définition de la vitesse dans le mouvement rectiligne varié. — Vitesse moyenne. — Vitesse à un instant donné.

Physique. — 1° Un vase contenant un liquide possède un fond plan et horizontal ayant 7^{dcm} de surface; la partie supérieure de ce vase, où s'arrête le niveau du liquide, est cylindrique et possède une section de 3^{dcm2} de surface. On pose sur la surface libre du liquide un corps pesant 1500^{gr} et de forme quelconque qui y flotte en équilibre.

De combien est augmentée la pression totale sur le fond du vase.

2° Machine de Clarke ou machine de Gramme.

(Décrire une de ces machines et non les deux.)

(25 avril).

Mathématiques. — 1° Connaissant le volume, la hauteur et le rayon de l'une des bases d'un *tronc de cône*, calculer le rayon de l'autre base. Discuter.

2° Somme des termes d'une progression géométrique. Examiner le cas où la progression est décroissante et où le nombre des termes croît indéfiniment.

Physique. — 1° Une droite lumineuse placée perpendiculairement à l'axe principal d'une lentille convergente, à 35^{cm} de cette lentille, fournit, sur un écran placé au delà de la lentille, une image dont la hauteur est 25^{mm}. On demande quelle est la hauteur de l'objet lumineux, sachant que la distance focale de la lentille est 25^{cm}?

2° Machine pneumatique.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

(SCIENCES NOUVEAU RÉGIME)

(25 avril).

Mathématiques. — 1° (Problème obligatoire). — On donne une circonférence O et deux droites OA et OB passant par son centre.

D'un point M de la circonférence on abaisse les perpendiculaires MP, MQ sur OB et sur OA.

Déterminer le point M de telle façon que :

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = l^2,$$

l étant une longueur donnée. Discuter.

On désignera par R le rayon de la circonférence et par α l'angle donné des deux droites.

2° Trois questions à choisir. (a) Inégalité des jours et des nuits.

(b) Calendrier.

(c) Projection stéréographique.

Physique. — 1° (Problème obligatoire). — Une pile est formée de six éléments Daniell montés en deux séries de trois éléments, les deux séries étant associées en surface. Chaque élément a une force électromotrice égale à 1.1 volt et une résistance égale à 1.5 ohm. Les pôles de cette pile sont réunis par un fil métallique ayant 11 ohms de résistance. Quelle est, en ampères, l'intensité du courant produit.

2° Trois questions à choisir. (a) Relation entre les pressions supportées par deux petites surfaces de même étendue placées sur des plans horizontaux différents, dans un même fluide pesant, en équilibre.

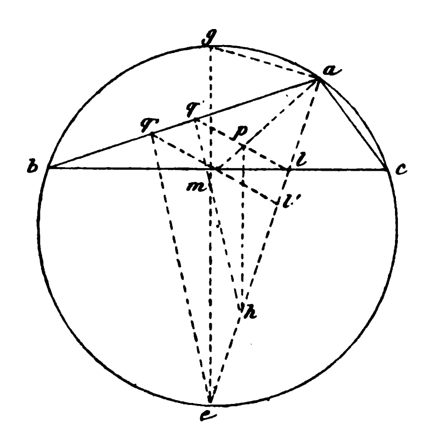
(b) Résultante des pressions supportées par la surface d'un corps immergé dans un fluide en équilibre.

(c) Deux liquides non miscibles remplissent complètement un vase fermé de toutes parts. Démontrer que leur surface de séparation est un plan horizontal.

QUESTION 388

On donne un triangle abc. *Du sommet* a, *on mène la médiane* am *qui aboutit au milieu* m *de* bc, *et la bissectrice* al *qui rencontre la base* bc *au point* l. *Du point* l, *on élève une perpendiculaire à la bissectrice* al; *cette droite coupe la médiane au point* p *et le côté* ab *au point* q. *Démontrer que la perpendiculaire abaissée de* p *sur* bc, *et la perpendiculaire élevée de* q *à* ab *se coupent sur la bissectrice* al. (Mannheim.)

La perpendiculaire élevée de m à bc coupe le cercle circonscrit à abc aux points e, g. Du point e, milieu de l'arc compris entre les côtés ab, ac, abaissons la perpendiculaire eq' sur ab : je dis que *$q'm$ est perpendiculaire à la bissectrice* al.



En effet, les points e, b, q', m appartiennent à une circonférence de cercle. Il en résulte que l'angle eml' est égal à l'angle ebq', et par suite, qu'il est égal à l'angle ega. Ainsi, la droite $q'ml'$ est parallèle à ga, c'est-à-dire perpendiculaire à al.

Prenons maintenant le triangle pqh, dont les côtés sont parallèles aux côtés du triangle $mq'e$. Ces triangles ont leurs sommets q et q' d'une part, p et m d'autre part, qui sont sur les droites aq', am : les autres sommets h et e sont alors sur une droite qui passe par a ou, ce qui revient au même, le sommet h est sur la droite ae, qui est la bissectrice de l'angle bac.

NOTA. — Nous avons reçu une autre solution de M. J. Bataille, élève au collège de Perpignan.

QUESTION 444

Solution par A. DROZ-FARNY.

L'égalité

$$-a'^4 - b'^4 - c'^4 + 2b'^2c'^2 + 2c'^2a'^2 + 2a'^2b'^2 =$$
$$[-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2]\left[\frac{1 - az(b-y) + bx(c-z) + cy(a-x}{abc}\right]^2$$

devient identique si l'on fait simultanément

$$a'^2 = (b-y)^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}(b-y)z,$$

$$b'^2 = (c - z)^2 + x^2 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca}(c - z)x,$$

$$c'^2 = (a - x)^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}(a - x)y.$$

(E. Catalan).

Portons, sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, respectivement, les longueurs $BA' = x$, $CB' = y$, $AC' = z$; et représentons les surfaces : ABC, AB'C', BA'C', CA'B', A'B'C' respectivement par S, S', S'', S''', Δ.

On a $\overline{C'B'}^2 = z^2 + (b - y)^2 - 2z(b - y)\cos A.$

Or $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$

De là résulte $C'B' = a'$, $A'C' = b'$, $A'B' = c'$.

On a $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{z(b - y)}{bc} = \dfrac{az(b - y)}{abc};$

de même $\dfrac{S''}{S} = \dfrac{bx(c - z)}{abc}$, et $\dfrac{S'''}{S} = \dfrac{cy(a - x)}{abc}.$

Or $\Delta = S - S' - S'' - S'''$

$$\Delta = S\left(1 - \frac{S'}{S} - \frac{S''}{S} - \frac{S'''}{S}\right)$$

$$\Delta^2 = S^2\left[1 - \frac{az(b-y)+bx(c-z)+cy(a-x)}{abc}\right]^2 \text{ etc.}$$

Nota. — M. Sollertinsky nous a envoyé une solution analogue.

QUESTION 446

Solution par M. B. Sollertinsky.

De part et d'autre du point A, *commun à deux circonférences* O, O', *on porte sur le rayon* OA, *de l'une, deux longueurs égales* AL, AM; *et, des points* L, M *comme centres, avec* LA, MA *pour rayons, on trace deux circonférences qui coupent la circonférence* O' *en* B' *et* C'. *Si* B, C *sont les points où* AB', AC' *rencontrent la circonférence* O, *et que* AD *soit une corde de* O, *tangente à* O', *et* AD' *une corde de* O', *tangente à* O, *chacun des quadrilatères* ABCD, AB'C'D' *est harmonique.* (Bernès.)

Soit I le point à l'infini, dans la direction LM.

Le faisceau O' (LMAI) étant harmonique, il en est de même du faisceau A (BCDA) ou A (B'C'AD'), formé par les rayons AB, AC, AD, AD' respectivement perpendiculaires à ceux du premier faisceau. C. Q. F. D.

QUESTION 447

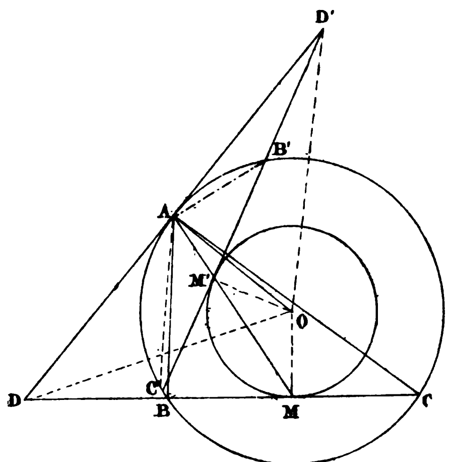
Solution par M. B. SOLLERTINSKY.

A un même cercle sont inscrits deux triangles ABC, AB′C′ *qui ont les angles en* A *supplémentaires et de sens contraires compris entre les côtés homologues proportionnels :* $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$.
1° Démontrer que les symédianes issues de A, *dans les deux triangles, sont symétriques relativement au rayon* AO; *2° que si, par* A, *on trace* Ax *parallèle à* BC, Ax′ *parallèle à* B′C′, *les médianes issues de* A, *dans les deux triangles, sont antiparallèles relativement à l'angle* xAx′; *3° étant donné l'un des triangles, construire l'autre.* (Bernès.)

1° Soient D, D′ les points où la tangente en A, au cercle O. rencontre BC, B′C′. On a

$$\frac{D'B'}{D'C'} = \frac{AB'^2}{AC'^2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{DB}{DC}.$$

De plus, B′C′ = BC comme cordes d'arcs égaux. On conclut de là que AD′ = AD.



Mais les symédianes, issues de A, dans les triangles ABC, AB′C′, sont perpendiculaires à DO, D′O : elles sont donc symétriques par rapport à AO.

2° Soient M, M′ les milieux des côtés BC, B′C′. Dans les cercles égaux DAOM, D′AM′O, les angles MAO, M′AO, s'appuyant sur les cordes égales OM, OM′, sont égaux. Donc, *les médianes* AM, AM′ *des triangles* ABC, AB′C′ *ne font qu'une droite.*

Cette droite fait des angles égaux avec les tangentes BC, B'C' au cercle OM : elle est donc la bissectrice de l'angle xAx'.

3° Étant donné le triangle ABC, le côté B'C' de l'autre triangle sera la tangente au cercle OM à l'intersection M' de ce cercle avec la médiane AM.

QUESTIONS PROPOSÉES

494. — Démontrer les formules suivantes, dans lesquelles A, B, C désignent les trois angles d'un triangle :

1° $\sin 2A \sin^2 B + \sin 2B \sin^2 C + \sin 2C \sin^2 A$
$= 3 \sin A \sin B \sin C + \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A).$

2° $\sin 2A \cos^2 B + \sin 2B \cos^2 C + \sin 2C \cos^2 A$
$= \sin A \sin B \sin C - \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A).$

3° $\cos 2A \sin^2 B + \cos 2B \sin^2 C + \cos 2C \sin^2 A$
$= -\cos A \cos B \cos C - \cos (A-B) \cos (B-C) \cos (C-A).$

4° $\cos 2A \cos^2 B + \cos 2B \cos^2 C + \cos 2C \cos^2 A + 1$
$= -3 \cos A \cos B \cos C + \cos (A-B) \cos (B-C) \cos (C-A).$

5° $\sin 2A \cos 2B + \sin 2B \cos 2C + \sin 2C \cos 2A$
$= -2 \sin A \sin B \sin C - 2 \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A).$

6° $\cos 2A \cos 2B + \cos 2B \cos 2C + \cos 2C \cos 2A + 1$
$= 2 \cos A \cos B \cos C + 2 \cos (A-B) \cos (B-C) \cos (C-A).$

(Joseph Gillet.)

495. — Trouver la condition pour qu'un quadrilatère convexe puisse être partagé en quatre triangles équivalents ayant pour bases les côtés du quadrilatère et pour sommet commun un point intérieur.

Connaissant trois sommets d'un quadrilatère satisfaisant à cette condition trouver le lieu du quatrième sommet.

(Dellac.)

496. — On donne un carré *abcd*. Du sommet *a* on mène une droite qui coupe *bc* au point *p* et une droite *aq* qui coupe *cd* au point *q*. L'angle *paq* étant toujours égal à 45°, démontrer que, quelle que soit sa position, la distance du point *a* à la droite *pq* est constante.

(Mannheim.)

497. — La fonction

$$2\left[a^2x^2(y^2-b^2)^2+b^2y^2(x^2-a^2)^2\right]^3-(a^2y^2+b^2x^2)^2\left[a^2x^2(y^2-b^2)^2-b^2y^2(x^2-a^2)^2\right]^2$$

est divisible par les deux polynômes

$$a^2y^2+b^2x^2-2a^2b^2,$$
$$2x^2y^2-a^2y^2-b^2x^2.$$

Le vérifier et trouver le quotient.

(E.-N. Barisien.)

498. — Dans un triangle quelconque, le produit des distances des trois cercles exinscrits pris deux à deux est égal au double du produit des trois côtés du triangle.

(E.-N. Barisien.)

499. — Si entre les douze quantités $A_1, A_2, \ldots A_6, a_1, a_2, \ldots a_6$ on a :

$$\begin{vmatrix} a_3-A_1, & a_4-A_2, & A_1a_4-A_2a_3 \\ a_5-A_3, & a_6-A_4, & A_3a_6-A_4a_5 \\ a_1-A_5, & a_2-A_6, & A_5a_2-A_6a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_5-A_1, & a_6-A_2, & A_1a_6-A_2a_5 \\ a_1-A_3, & a_2-A_4, & A_3a_2-A_4a_1 \\ a_3-A_5, & a_4-A_6, & A_5a_4-A_6a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

on aura aussi :

$$\begin{vmatrix} a_1-A_1, & a_2-A_2, & A_1a_2-A_2a_1 \\ a_3-A_3, & a_4-A_4, & A_3a_4-A_4a_3 \\ a_5-A_5, & a_6-A_6, & A_5a_6-A_6a_5 \end{vmatrix} = 0,$$

(E. Lemoine.)

500. — Soit PQRS un quadrilatère. On suppose que M, point de concours des diagonales, partage la diagonale PR de manière que

$$MR = 3MP.$$

On prend sur le prolongement de MP un point C tel que

$$MC = MR,$$

et sur le prolongement de RS un point B tel que BC soit parallèle à SP. La droite BP prolongée coupe SM en A. On joint A à un point D de RP tel que AD soit parallèle à PQ.

Démontrer que SD est parallèle à RQ. *(Lucien Lévy.)*

501. — La différence entre les périmètres de deux polygones réguliers convexes semblables, l'un inscrit, l'autre circon-

scrit à une même circonférence, est plus petite qu'un côté du polygone inscrit, dès que le nombre des côtés du polygone est supérieur à quatre. *(Lucien Lévy,)*

502. — Soient φ_a, φ_b, φ_c trois forces appliquées suivant les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC.

1° Démontrer que leur résultante est dirigée suivant la droite harmoniquement associée au point dont les coordonnées barycentriques sont $\frac{a}{\varphi_a}$, $\frac{b}{\varphi_b}$, $\frac{c}{\varphi_c}$.

2° Trouver les expressions qui donnent la grandeur de la résultante et les angles qu'elle fait avec les côtés du triangle.

(Louis Bénézech.)

503. — Les droites qui joignent les points de Brocard ω, ω' d'un triangle aux sommets A, B, C, interceptent sur les cercles déterminés par les points (ωBC), (ωCA), (ωAB); (ω'BC), (ω'CA), (ω'AB) des segments l_a, l_b, l_c, l'_a, l'_b, l'_c qui satisfont aux égalités :

$$cl_a + al_b + bl_c = bl'_a + cl'_b + al'_c = 2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

(Louis Bénézech.)

504. — Si un trapèze birectangle est tel que les deux circonférences inscrites à ce trapèze aient une tangente commune intérieure parallèle aux bases, la moitié de sa hauteur est moyenne géométrique entre les bases; et la moitié du côté BB est moyenne arithmétique entre ces mêmes bases.

(Lauvernay.)

505. — La hauteur de ce trapèze étant constante, trouver 1° le lieu du point de rencontre des diagonales (ellipse); 2° le lieu du point de rencontre de la tangente commune parallèle aux bases avec la droite joignant l'un des sommets de l'angle droit du trapèze au point de contact du côté avec la circonférence inscrite dans cet angle (hyperbole). *(Lauvernay.)*

506. — Dans ce même trapèze, on mène la tangente commune non parallèle aux bases, qui rencontre en A le côté BB'; démontrer que les rayons des circonférences tangentes aux

circonférences décrites sur AB, AB′ comme diamètres et au cercle décrit sur la hauteur du trapèze comme diamètre forment une proportion harmonique avec le rayon de ce dernier cercle. *(Lauvernay.)*

507. — L'inverse du diamètre du cercle tangent à trois circonférences tangentes entre elles et possédant une tangente commune est égal à la somme algébrique des inverses des rayons de ces trois circonférences. *(Lauvernay.)*

508. — La droite menée par le pôle P d'un côté d'un triangle, par rapport au cercle circonscrit, et le milieu d'un second côté, rencontre le troisième côté en un point également distant des tangentes menées au cercle circonscrit par les extrémités du second côté. *(Lauvernay.)*

509. — On donne deux cordes d'un cercle; l'une AA′ fixe, l'autre BC mobile et perpendiculaire au rayon OA; E étant le point commun à ces deux cordes, on prend, sur BC le point D tel que $BD.BC = \overline{BE}^2$. Trouver le lieu du point de rencontre de la droite A′D avec la tangente en B.

(Lauvernay.)

510. — On mène deux tangentes parallèles à une circonférence et une troisième tangente arbitraire BAB′ rencontrant les premières en B, B′; on décrit les circonférences de centres B et B′ et de rayons BA, B′A, A étant le point de contact de BB′. Démontrer que les rayons des cercles tangents aux trois premiers forment, avec celui de la première circonférence, une proportion harmonique. *(Lauvernay.)*

511. — Etant données trois droites concourantes $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ et la transversale $\alpha\beta\gamma$, on a la relation

$$\frac{\sin(\alpha S\gamma)}{S\beta} = \frac{\sin(\beta S\gamma)}{S\alpha} + \frac{\sin(\alpha S\beta)}{S\gamma}.$$

Corollaire. — AD étant la bissectrice intérieure de l'angle A d'un triangle, on a :

$$\frac{2\sin\frac{A}{2}}{AD} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

(Lauvernay.)

512. — Résoudre l'équation :

$$2 \sin 3x = 3 \cos x + \cos 3x.$$

(Lauvernay.)

513. — 1° Calculer les angles B, C d'un triangle, connaissant le troisième angle A et sachant que la bissectrice intérieure issue du sommet A est moyenne géométrique entre la hauteur et la médiane issues du même sommet.

2° Calculer les angles B, C d'un triangle, connaissant le troisième angle A et sachant que le rayon du cercle inscrit est moyen géométrique entre les segments formés sur la hauteur issue du sommet A par l'orthocentre. *(Lauvernay.)*

514. — Démontrer les identités suivantes :

1° $$9 \cos^2 \varphi \cos^2 3\varphi - \sin^2 \varphi \sin^2 3\varphi = (2 \cos 4\varphi + \cos 2\varphi)(\cos 4\varphi + 2 \cos 2\varphi).$$

2° $$\frac{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\left[\cos \varphi - \cos 3\varphi - \sqrt{3} \sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sin \varphi \sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$+ \frac{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\left[\cos \varphi - \cos 3\varphi + \sqrt{3} \sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sin \varphi \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$- \frac{2 \sin \varphi \sin 2\varphi (\cos \varphi - \cos 3\varphi)}{\sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{3}\right)} = 3.$$

(Lauvernay.)

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9260-4-93.

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$
ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. **A. Aubry.**

(*Suite*, voir page 101.)

V. — Applications des formules précédentes.

17. — La relation (18) du nº 16 donne

$$\sqrt[n]{\frac{x+n+1}{x+1}} + \sqrt[n]{\frac{x+1}{x+n+1}} > 2$$

$$\sqrt[n]{\frac{x+n}{x}} + \sqrt[n]{\frac{x}{x+n}} > 2$$

et la relation (8) du nº 9,

$$4 > 2\sqrt[n]{\frac{x+n+1}{x+1}} + 2\sqrt[n]{\frac{x}{x+n}}$$

d'où, additionnant et transposant

$$\sqrt[n]{\frac{x+n}{x}} - \sqrt[n]{\frac{x}{x+n}} > \sqrt[n]{\frac{x+n+1}{x+1}} - \sqrt[n]{\frac{x+1}{x+n+1}}$$

Ainsi *la fonction* $\sqrt[n]{\frac{x+n}{x}} - \sqrt[n]{\frac{x}{x+n}}$ *décroît constamment entre les deux valeurs* $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$, o, *quand* x *prend des valeurs entières de plus en plus grandes entre* 1 *et* ∞.

18. — *L'expression* $y = \frac{(1+x)^m}{1+mx}$ *croît constamment entre les deux limites* 1, ∞ : *1º quand* m *désignant un nombre fixe plus grand que* 1, x *croît de* o *à* ∞; *2º si,* x *désignant un nombre fixe positif quelconque,* m *croît de* 1 *à* ∞.

La valeur de y est visiblement égale à l'unité pour $x = 0$, ou pour $m = 1$.

On a $\frac{(1+x)^m}{x} > x^{m-1}$, donc en divisant les deux termes

de y par x, on a

$$y > \frac{x^{m-1}}{\frac{1}{x} + m}$$

quantité qui tend vers l'infini avec x.

On a, de même, $\frac{(1+x)^m}{m} > x,$

donc

$$y > \frac{x}{\frac{1}{m} + x}$$

et par suite, la valeur de y tend vers ∞ en même temps que m.

Les valeurs limites de y sont donc bien celles qu'indique l'énoncé : il reste à faire voir que leurs accroissements sont toujours de mêmes signes.

Pour $m > 1$ et $h > 0$, on a

$$\left(1 + \frac{h}{1+x}\right)^m > 1 + \frac{hm}{1+x} > 1 + \frac{hm}{1+mx},$$

d'où

$$\frac{(1+x+h)^m}{(1+m(x+h)} > \frac{(1+x)^m}{1+mx}.$$

D'un autre côté, x étant positif et m supérieur à 1, les puissances de y, de degrés supérieurs à 1, sont de plus en plus grandes. On a donc

$$\frac{(1+x)^{m+h}}{1+(m+h)x} > \frac{(1+x)^{m+h}}{(1+mx)^{\frac{m+h}{m}}} = y^{\frac{m+h}{m}} > y,$$

d'où

$$\frac{(1+x)^{m+h}}{1+(m+h)x} > \frac{(1+x)^m}{1+mx}$$

ce qui prouve que les accroissements sont toujours positifs.

19. — Nous allons donner une dernière étude de variation de fonctions d'après les mêmes principes et conduisant à des calculs assez intéressants.

Pour $a > 1, m > h > 0$, on a

$$\frac{(a^m+1)^{\frac{m+h}{m}} - (a^m)^{\frac{m+h}{m}}}{(a^m+1) - a^m} > \frac{m+h}{m} a^{\frac{m}{h}} > 1,$$

d'où

(α) $$\sqrt[m]{a^m + 1} > \sqrt[m+h]{a^{m+h} + 1}.$$

Ainsi *la fonction* $\sqrt[x]{a^x + 1}$ *décroît quand* x *augmente.*

On a $$\sqrt[x]{a^x + 1} - a = \frac{(a^x + 1)^{\frac{1}{x}} - (a^x)^{\frac{1}{x}}}{(a^x + 1) - a^x}$$

Le premier membre est donc compris entre les deux quantités

$$\frac{1}{x(a^x + 1)^{\frac{x-1}{x}}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{xa^{x-1}},$$

qui tendent toutes deux vers zéro quand x augmente indéfiniment. Donc *la fonction considérée varie uniformément de* a + 1 *à* a *quand* x *varie de* 1 *à* ∞.

Nous allons maintenant faire voir qu'*elle décroît plus lentement que les termes d'une progression géométrique.* En effet, élevons à la puissance mh les deux membres de (α) et changeons ensuite m en $m - h$, il vient

$$(\beta) \qquad (a^{m-h} + 1)^h > (a^m + 1)^{h - \frac{h^2}{m}}.$$

Or, d'après le théorème de Cauchy, n° 6, on a

$$(\gamma) \qquad a^{m+h} + a^{m-h} > 2a^m \quad (*).$$

Ajoutant $a^{2m} + 1$ aux deux membres, il vient

$$(\delta) \qquad (a^{m-h} + 1)(a^{m+h} + 1) > (a^m + 1)^2.$$

Élevons les deux membres de (δ) à la puissance $m - h$ et multiplions ensuite par $(a^{m-h} + 1)^{2h}$, il viendra à cause de (β)

$$(a^{m-h}+1)^{m+h}(a^{m+h}+1)^{m-h} > [(a^m+1)^{m-h}(a^{m-h}+1)^h]^2 > \left[(a^m+1)^{\frac{m^2-h^2}{m}}\right]^2$$

d'où, en extrayant la racine marquée par l'indice $2(m^2 - h^2)$,

$$(\varepsilon) \qquad \left[\sqrt[m-h]{a^{m-h} + 1}\,\sqrt[m+h]{a^{m+h} + 1}\right]^{\frac{1}{2}} > \sqrt[m]{a^m + 1}.$$

20. — Dans la relation

$$\frac{(1 + x)^m - 1}{x} > m > \frac{1 - (1 - x)^m}{x}, \qquad x^2 < 1,$$

(*) En général, m désignant un nombre entier positif, a et h des nombres positifs, on a

$$m\sqrt[m]{a^0 a^h a^{2h} a^{3h} \dots a^{(m-1)h}} < a^0 + a^h + \dots + a^{(m-1)h}$$

ou bien $$ma^{\frac{m-1}{2}h} < \frac{a^{mh} - 1}{a^h - 1},$$

d'où, pour $h = 1$, $a = 1 \pm x$,

$$(1 \pm x) \gtrless 1 \pm mx(1 \pm x)^{\frac{m-1}{2}},$$

relation plus approchée que la relation (1) ci-après, mais moins facile à calculer. D'ailleurs (1) s'en déduit, à cause de la première inégalité du n° 9.

faisons successivement $m = 0, 1, 2, 3, \ldots m-1$, et additionnons, il viendra

$$(1) \qquad (1 \pm x)^m \gtrless 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2$$

De même, dans la relation

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} < 1 + \frac{x}{m}.$$

Changeons $\frac{1}{m}$ en $\frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \frac{4}{m}, \ldots \frac{m}{m}$, et additionnons, il vient pour $0 < x < 1$,

$$(2) \qquad \sqrt[m]{1+x} < \frac{2m + (m+1)x}{2m + (m-1)x} \quad (*)$$

Changeons x en $\frac{x}{1-x}$, cette relation devient, $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

$$(3) \qquad \sqrt[m]{1-x} > \frac{2m - (m+1)x}{2m - (m-1)x}.$$

Ces relations sont beaucoup plus approchées que celles que nous avons obtenues au paragraphe précédent.

(A suivre.)

(*) Considérons la progression arithmétique croissante $a, b, c, \ldots k\, l$. composé de $m+1$ termes.

On a, en posant $g = \frac{a+l}{2}$, $r = \frac{l-a}{m}$,

$$\frac{l}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdots \frac{l}{k} = \textit{sensiblement} \left(\frac{g + \frac{r}{2}}{g - \frac{r}{2}} \right)^m,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad \sqrt[m]{\frac{l}{a}} = \frac{a(m-1) + l(m+1)}{a(m+1) + l(m+1)}.$$

Cette théorie a été donnée par Ampère d'après une idée d'Euler. La formule (α) peut servir à l'extraction des racines. Elle n'est qu'une transformation de la formule (2), qui a d'ailleurs l'avantage d'indiquer le sens de l'erreur commise.

La formule (3) peut se transformer de même.

La formule *approchée* (α) avait été trouvée auparavant par de Lagny pour le cas de $m = 3$; et par Lambert, dans le cas général, par application de la formule du binôme.

SUR UNE IDENTITÉ DE M. BASCHWITZ

M. Catalan, dans une lettre récente, nous a communiqué le théorème suivant, que lui avait fait connaître M. Baschwitz.

La somme de trois carrés impairs est toujours la somme de quatre carrés fractionnaires.

Cette proposition est vraie pour trois carrés quelconques entiers ou fractionnaires, quelle que soit la parité des nombres proposés; et cette transformation peut être effectuée d'une infinité de façons.

C'est ce qu'on vérifie bien simplement de la manière suivante :

Soient d'abord A, B, C trois nombres quelconques, entiers.

Prenons l'identité de Lagrange

$$(A^2+B^2+C^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \equiv (A\beta-B\alpha)^2+(B\gamma-C\beta)^2+(C\alpha-A\gamma)^2 + (A\alpha+B\beta+C\gamma)^2.$$

D'autre part, l'identité

$$(t^2-t''^2)^2+(2tt'')^2 \equiv (t''^2+t^2)^2,$$

lorsqu'on y change t^2 en $t^2+t'^2$, donne,

$$(t^2+t'^2-t''^2)^2+(2tt'')^2+(2t't'')^2 \equiv (t^2+t'^2+t''^2)^2 \quad (*)$$

En prenant

$$\alpha = t^2+t'-t'', \qquad \beta = 2tt'', \qquad \gamma = 2t't'',$$

l'identité de Lagrange devient

$$A^2+B^2+C^2 \equiv \left[\frac{2Att''-B(t^2+t'^2+t''^2)}{t^2+t'^2+t''^2}\right]^2+\left[\frac{2Bt't''-C(t^2+t'^2-t''^2)}{t^2+t'^2+t''^2}\right]^2$$
$$+\left[\frac{C(t^2+t'^2-t''^2-2At't''}{t^2+t'^2+t''^2}\right]^2+\left[\frac{A(t^2+t'^2-t''^2)+2Btt''+2Ct't''}{t^2+t'^2+t''^2}\right]^2.$$

En donnant aux paramètres t, t', t'' des valeurs *arbitraires*, entières ou même fractionnaires, la transformation indiquée par M. Baschwitz se trouve réalisée.

Si A, B, C étaient fractionnaires, la transformation précédente serait encore possible.

(*) Cette identité évidente doit avoir été, depuis longtemps, observée. On la trouve notamment dans un article de M. Catalan : *Propositions relatives à la théorie des nombres* (*Nouvelles Annales*, 1874, p. 521).

En effet, en posant

$$A = \frac{a}{p}, \qquad B = \frac{b}{p}, \qquad C = \frac{c}{p}.$$

a, b, c, p étant entiers, on aura d'abord, par application de la formule indiquée,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{a'}{d}\right)^2 + \left(\frac{b'}{d}\right)^2 + \left(\frac{c'}{d}\right)^2 + \left(\frac{d'}{d}\right)^2;$$

puis

$$A^2 + B^2 + C^2 = \left(\frac{a'}{pd}\right)^2 + \left(\frac{b'}{pd}\right)^2 + \left(\frac{c'}{pd}\right)^2 + \left(\frac{d'}{pd}\right)^2.$$

Remarque. — La transformation est toujours possible, quel que soit le dénominateur D, imposé aux fractions du second membre, *pourvu que* D *soit une somme de trois carrés.*

Le cas où le dénominateur est égal à 2 fait pourtant exception. Dans ce cas, l'équation

$$t^2 + t'^2 + t''^2 = 2,$$

n'est soluble en nombres entiers que si l'on suppose, par exemple, $t=0$, $t = t' = 1$. Mais alors le second membre de l'identité est $A^2+B^2+C^2$; il n'y a pas eu *transformation effective.*

C'est dans ce cas singulier que M. Baschwitz a effectué la transformation d'une somme de trois carrés impairs, en quatre carrés fractionnaires.

Des relations

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \equiv (a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2,$$

$$4(a+b+c) \equiv 3(a+b+c) + (b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c),$$

$$3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

on déduit

$$(2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 \equiv \left(a+b+c+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(b+c-a+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(c+a-b+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(a+b-c+\frac{1}{2}\right)^2.$$

C'est l'identité de M. Baschwitz. On peut l'obtenir immédiatement en prenant la première identité

$$A^2 + B^2 + C^2 \equiv \left(\frac{A+B+C}{2}\right)^2 + \left(\frac{B+C-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{C+A-B}{2}\right)^3 + \left(\frac{A+B-C}{2}\right)^2,$$

et en changeant : A, en $2a+1$; B, en $2b+1$; C, en $2c+1$.

En terminant, nous ferons observer que l'identité (A), obtenue plus haut peut avoir diverses applications. Par exemple, elle permet de résoudre en nombres entiers l'équation

$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 = y^2 + z^2 + u^2 + v^2,$$

dans laquelle a, b, c, sont des nombres entiers donnés, x, y, z, u, v étant des inconnues. *G. L.*

SUR LA QUESTION 482

Par M. **E. Catalan.**

I

Au mois de décembre dernier, je reçus, de mon jeune Camarade Lemoine, une carte postale, contenant l'énoncé suivant:

x, y, z *étant des nombres entiers, le produit*

$$P = (x^2 + y^2 + z^2)(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)$$

est-il, toujours, la somme de trois carrés?

Peu après, M. Lemoine m'apprit que, en vertu d'une identité trouvée par notre ami Laisant

$$P = (x^2y \pm xz^2)^2 + (xy^2 \pm yz^2)^2 - [xyz \mp x^2z \mp y^2z]^2;$$

valeur qu'il est aisé de vérifier.

II

Considérons le produit

$$T = (t^2 + z^2)(t^2z^2 + x^2z^2).$$

La formule de *Fibonacci* (*) donne immédiatement,

$$T = z^2(t^2 \pm xy)^2 + t^2(z^2 \pm xy)^2.$$

Donc, si l'on prend

$$t^2 = x^2 + y^2:$$

$$(1)\quad \begin{cases} T = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2z^2 + y^2z^2 + x^2y^2) = P \\ \quad = z^2(x^2 + y^2 \pm xy)^2 + x^2(z^2 \mp xy)^2 + y^2(z^2 \mp xy)^2, \end{cases}$$

conformément à la proposition de M. Laisant.

III

Dans l'identité

$$(2)\quad (t^2 + z^2)(t^2z^2 + x^2y^2) = z^2(t^2 \pm xy)^2 + t^2(z^2 \mp xy)^2,$$

prenons $t^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2.$

Elle devient

$$(3)(^{**})\quad \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2) \\ \qquad [(x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2)z^2 + x^2y^2] \\ = z^2(x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 \pm xy)^2 + \\ \qquad (x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2)(z^2 \mp xy)^2. \end{cases}$$

(*) $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' \pm bb')^2 + (ab' \mp ba')^2.$

(**) Le premier membre, développé, contient *trente-six* carrés; le second *six* seulement.

IV

La relation (3), généralisée, peut être écrite ainsi :

$$(4)\quad (^*)\quad \begin{cases} (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)[x_1^2x_2^2+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2)x_n^2] \\ = x_n^2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2 \pm x_1x_2)^2 \\ + (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2)(x_n^2 \mp x_1x_2)^2. \end{cases}$$

V

Si l'on suppose

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \ldots, x_n = n,$$

on a

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[n + \frac{(n-1)\,n(n+1)}{6}\right]$$
$$= n^2\left[\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} \pm 2\right]^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}(n^2 \pm 2)^2;$$

puis, par des réductions successives :

$$(n+1)(2n+1)[24-(n-1)\,n^2\,(n-1)]$$
$$= n[(n-1)n(2n-1) \pm 12]^2 + 6(n-1)(2n-1)(n^2 \mp 2)^2,$$
$$(n+1)(2n+1)[24+(n-1)n^2(2n-1)]$$
$$= n[(n-1)n(2n-1) \pm 12]^2 + 6(n-1)(2n-1)(n^2 \mp 2)^2,$$
$$(n-1)(2n+1)[24+(n-1)n^2(2n-1)]$$
$$=(n-1)(2n-1)[n^2(n-1)(2n-1)+6n^4+24]+144n,$$
$$24(n+1)(2n+1)+(n-1)n^2(2n-1)6n$$
$$= (n-1)(2n-1)(6n^4+24)+144n,$$
$$(n+1)(2n+1) = (n-1)(2n-1)+6n;$$

ce qui est identique.

VI

Le produit P, *somme de trois carrés*, est aussi la *somme de quatre carrés* (**).

(*) D'après cette égalité (4), une *somme de* n^2 *carrés* est réduite à une *somme de* n *carrés*. On peut consulter, relativement à ce sujet, notre *Mémoire sur certaines décompositions en carrés* (Rome, 1884).

(**) Du moins si l'on ne fait pas d'hypothèses particulières sur x, y, z.

En effet, l'identité connue :

$$(5)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=(xx'+yy'+zz')^2 \\ +(xy'-yx')^2+(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2 \end{cases}$$

cas particulier de celle d'Euler, donne

$$(6)\quad \mathrm{P} = (3xyz)^2 + x^2(y^2-z^2)^2 + y^2(z^2-x^2)^2 + z^2(x^2-y^2)^2$$

VII

Arrivons à la *Question* 482, qui est ainsi formulée :

La somme des carrés de trois nombres entiers, multipliée par la somme des doubles produits des carrés de ces nombres, est une somme de trois carrés entiers. (Lemoine.)

Représentons, pour abréger, l'identité (1) par

$$(x^2+y^2+z^2)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2) = u^2+v^2+w^2.$$

On aurait donc, suivant M. Lemoine,

$$(x^2+y^2+z^2)(2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2) = u'^2+v'^2+w'^2;$$

et, en conséquence,

$$2(u^2+v^2+w^2) = u'^2+v'^2+w'^2.$$

Or, c'est seulement dans des cas très particuliers que *le double de la somme de trois carrés est une somme de trois carrés* (*).

L'énoncé rappelé ci-dessus semble donc inexact (**).

(*) Par exemple, si $u=v$.

(**) L'énoncé a été rectifié (p. 96) et la proposition qui correspond à cet énoncé rectifié est démontrée par l'identité (1).

En observant que

$$(A)\quad (x^2+y^2+z^2)(y^2z^2+z^2x+x^2y^2) \equiv x^2y^2z^2+(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x^2+y^2),$$

la proposition en question se démontre immédiatement. En effet, le théorème de Fibonacci : « *Une somme de deux carrés multipliée par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés* » prouve que le produit $(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x^2+y^2)$ est une somme de deux carrés. D'après cela, le second membre de (A) est une somme de trois carrés.

On peut observer, d'ailleurs, que l'identité indiquée par M. Laisant pour résoudre la question posée par M. Lemoine est un cas particulier de l'identité de Lagrange. En effet, si, dans cette identité :

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) \equiv (aa'+bb'+cc')^2 + (ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2,$$

on pose $a=x,\quad b=y,\quad c=z,$

$a'=zx,\quad b'=yz,\quad c'=xy,$

on a $ab'-ba'=0;$

et le second membre se réduit à une somme de trois carrés.

(G. L.)

COMPARAISON DE DEUX CONSTRUCTIONS
DES COTÉS DES PENTAGONES RÉGULIERS INSCRITS A UN CERCLE DONNÉ

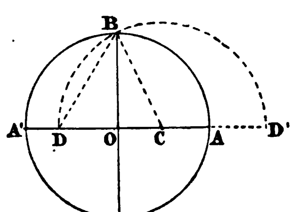
Par M. **Émile Lemoine.**

M. *H. Laurent* (*J. E.* 1893, p. 17) a communiqué une construction simple de ce problème, construction, qui comme l'a observée M. Mackay (*Journal*, p. 34), appartient à Ptolémée. Nous allons la comparer, au moyen de la *Géométrographie* (*), à la construction classique (voir *Traité de Géométrie* de MM. *Rouché* et *de Comberousse*, 6e édition, p. 179), la plus simple que nous connaissions jusqu'ici.

Nous profitons de l'occasion pour faire ressortir l'utilité qui ressort de notre méthode de comparaison des constructions.

A. — Méthode de Ptolémée.

Par O je mène une droite quelconque coupant la circonférence en A et en A′



$$R_1 + R_2.$$

Je trace la perpendiculaire B′OB à AA′

$$2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2.$$

En utilisant le rayon que j'ai dans le compas et le cercle décrit de A comme centre, tracé pour construire BB′, je place le milieu C de OA

$$2R_1 + R_2 + C_1 + C_2,$$

je décris C(CB) (**)

$$2C_1 + C_2,$$

qui coupe AA′ en D entre O et A′ et en D′; BD et BD′ (qu'il n'y a pas besoin de tracer), sont les côtés du pentagone régu-

(*) Voir Association française pour l'avancement des sciences 1892, Congrès de Pau; nous avons donné dans ce Journal, en 1889, p. 10 et 33, les principes généraux au moyen desquels la *Géométrographie* a été définie.

(**) Je désigne d'une façon générale par K (R) le cercle de centre K et de rayon R.

lier convexe inscrit au cercle et du pentagone régulier étoilé, ils sont donc obtenus par le symbole

$$5R_1 + 3R_2 + 5C_1 + 4C_3.$$

Simplicité : 17 ; Exactitude : 10 ; 3 droites, 4 cercles.

Nous avons introduit, depuis l'article, déjà cité, de 1889, la notion du *coefficient d'exactitude* ou plus simplement de l'*exactitude*, c'est la somme des coefficients des opérations de préparation C_1, C_2, R_1.

B. — Méthode classique.

Je trace la droite OM (M étant sur la circonférence)

$$R_1 + R_2,$$

Je divise OM en moyenne et extrême raison en N (N entre M et O), de façon que $\overline{MN}^2 = MO.NO$ et en N′ (N′ étant sur OM dans le sens ONM) de façon que $\overline{MN'}^2 = OM.ON'$.

MN et MN′ sont respectivement, selon l'expression consacrée, le segment additif et le segment soustractif de OM, divisée en moyenne et extrême raison.

J'obtiens N (voir Mémoire du Congrès de Pau, déjà cité, construction XXXVI — *a*) par le symbole

$$6R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 7C_3,$$

d'après la méthode classique (mais conduite suivant les principes de la *Géométrographie*) pour opérer la division de OM en moyenne et extrême raison.

J'obtiens N′ (puisque pour avoir N, la pointe du compas est restée en M) par le symbole

$$C_1 + C_3.$$

La circonférence M(MN) tracée pour avoir N coupe la circonférence donnée en ν_1 et ν_2.

La circonférence M(MN′) tracée pour avoir N′ coupe la circonférence donnée en ν_1' et ν_2'.

Les côtés des deux pentagones réguliers (convexe et étoilé) côtés qu'on n'a pas besoin de tracer, sont donc $\nu_1\nu_2$ et $\nu_1\nu_2'$, obtenus par le symbole

$$7R_1 + 4R_2 + 10C_1 + 8C_3,$$

simplicité : 29 ; exactitude : 17 ; 4 droites ; 8 cercles.

Nous avons exécuté la construction classique cependant en y appliquant les simplifications méthodiques que suggère la

Géométrographie. Ainsi (voir *Rouché*, loc. cit. fig. 191, p. 178) j'ai bien divisé le rayon OB en moyenne et extrême raison; mais comme il est plus simple pour le symbole définitif, d'opérer cette construction en s'arrangeant de façon que les segments de OB qui sont les côtés de décagones réguliers inscrits aient une extrémité en B (le B de la fig. 191 correspond à l'M de notre construction) nous avons fait ainsi. Cela simplifie le transport de longueurs sur le cercle pour placer les extrémités des côtés des pentagones. Si je n'avais pas opéré de cette façon et si j'avais fait, d'ailleurs, la division de OM en moyenne et extrême raison sans les simplifications méthodiques de la *Géométrographie*, le symbole eût été bien plus compliqué.

J'ai employé dis-je, pour diviser OM en moyenne et extrême raison la construction classique; mais en utilisant la construction nouvelle, plus simple, que j'ai donnée (Mémoire de Pau, déjà cité, dans la construction XXXVI — *c*), on verrait facilement que les points v_1, v_2, v'_1, v'_2 arrivent à se placer par le symbole

$$3R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 6C_3,$$

simplicité : 21 ; exactitude : 13 ; 2 droites ; 6 cercles.

Remarquons que la construction XXXVI — *c* ne donne que le segment additif et par conséquent seulement le moyen de placer v_1 et v_2; pour placer le segment soustractif et par conséquent v'_1 et v'_2 il suffit d'ajouter le symbole $3C_1 + C_3$, c'est ce que nous avons fait.

M. Bernès m'a fait connaître une très jolie construction, tout à fait nouvelle, pour diviser une droite en moyenne et extrême raison ; comme elle réduit le symbole de la construction dont il s'agit dans cette note, nous allons l'exposer.

Soit AB la droite qu'il faut diviser en moyenne et extrême raison aux points N et N' ; N étant entre A et B, N' sur la direction BA; le lecteur est prié de faire la figure.

Je décris A(AB) qui coupe AB en B'

$(2C_1 + C_3)$

Je décris B'(AB) qui coupe AB en B''

$C_1 + C_3$

A(AB) et B'(AB) se coupent en F.

Je décris B(BB′) et B″(BB′)

$(3C_1 + 2C_3)$

Ces deux cercles se coupent en O.

Je décris F(OA) qui coupe AB en N et N′

$(3C_1 + C_3)$

En tout: $(9C_1 + 5C_3)$.

Simplicité: 14; exactitude: 9; cinq cercles.

Le symbole le plus simple connu jusqu'ici (Congrès de Pau *loco citato*) déjà beaucoup moins élevé que celui de la construction classique était, pour placer N seul : $(2R_1 + R_2 + 9C_1 + 6C_3)$, et pour placer N et N′: $(2R_1 + R_2\ 12C_1 + 7C_3)$.

Simplicité : 22; exactitude: 14; une droite, sept cercles.

M. Bernès ajoute qu'il ne serait jamais arrivé à cette construction si simple sans la *géométrographie.*

En appliquant cette construction au problème de l'inscription des pentagones réguliers résolu par le procédé classique on trouve facilement pour symbole :

$$(R_1 + R_2 + 11C_1 + 6C_3)$$

Simplicité: 19; exactitude: 12; une droite; six cercles.

Ce qui se rapproche beaucoup de la construction déduite de la solution de *Ptolémée.*

J'ai trouvé récemment une autre solution, aussi simple que celle de M. Bernès, mais très différente.

Je décris A(AB) qui coupe AB en B′

$(2C_1 + C_3)$

Je décris B′(AB) qui coupe A(AB) en F et en F′

$(C_1 + C_3)$

Je trace FF′ qui coupe AB en G

$(2R_1 + R_2)$

Je prends GH = AB $(C_1 + C_3)$

Je décris H(GB) qui coupe AB en N et N′

$(3C_1 + C_3)$

En tout: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_3)$

Simplicité: 14; exactitude: 9; une droite, quatre cercles.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 107.)

268. (*) — *Si* X, Y, Z *sont les distances d'un point de la circonférence circonscrite aux sommets du triangle de référence, on a :*

1° $X^2 \sin 2A + Y^2 \sin 2B + Z^2 \sin 2C = 4S,$

2° $aX + bY + cZ = 0,$

(X, Y, Z, ayant alors les mêmes signes que les coordonnées normales du point considéré.)

1° On part des formules connues (*J. M. E.* Année 1891, p. 158, n° 166), on trouve $K = 4S.$

2° Cela résulte de ce que le cercle circonscrit est le lieu des points dont les coordonnées tripolaires sont inversement proportionnelles aux coordonnées normales (E. Lemoine, A. F. Limoges 1890, p. 14, n° 10.)

A ce propos, je ferai remarquer que les hyperboles $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ dont parle M. Lemoine, au même paragraphe, sont les transformées par points inverses des médiatrices.

269. — *Les centres de similitude du cercle inscrit et du cercle circonscrit sont les inverses* Γ_2, ν_2 *des points de Gergonne et de Nagel. Les centres de similitude du cercle circonscrit* O *et du cercle exinscrit* I′, *sont les inverses* $\Gamma'_{a,2}$ $\nu'_{a,2}$ *des points* Γ'_a, ν'_a.

270. — σ, σ' *étant les centres de similitude interne et externe des cercles circonscrit et de Brocard, les angles de Kiepert correspondant à ces points sont donnés par les racines de l'équation :*

$$\operatorname{tg}^2 \lambda - 2\operatorname{tg} \lambda \operatorname{cotg} \theta + 3 = 0,$$

θ *étant l'angle de Brocard* (**).

271. — *Si, par un point* M *on mène des parallèles aux trois côtés d'un triangle* ABC, *ces parallèles coupent les autres côtés en six points qui sont situés sur une même conique.*

On trouve, pour l'équation de cette conique,

$$\sum \frac{\beta' + \gamma'}{\alpha'} \alpha^2 - \sum \left[1 + \frac{(\beta' + \gamma')(\alpha' + \gamma')}{\alpha'\beta'} \right] \alpha\beta = 0.$$

α' β' γ' désignant les coordonnées barycentriques de M, relativement au triangle ABC (***).

(*) Les exercices 266, 267 seront donnés dans le prochain n° du *J. S.*

(**) Il est à remarquer que les deux angles dont les tangentes sont données par cette équation sont les compléments des angles de Steiner; d'où l'on déduit facilement les coordonnées normales de $\sigma\sigma'$.

(E. Lemoine.)

(***) Cette conique a été étudiée par M. Lemoine *A. F.* Congrès de La Rochelle, 1882, p. 117.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. *Lemoine*, la lettre suivante :

Mon cher ami,

Il n'y a guère de numéros du Journal où l'on ne trouve l'occasion de multiplier les résultats trouvés — et de le faire immédiatement et sans aucune peine — en y appliquant la *transformation continue*, que j'ai exposée *J. E.* 1892, pages 62, 91, 103. Je crois utile d'attirer l'attention de vos lecteurs sur ce point, en prenant pour exemple le numéro de mai, que je viens de recevoir.

(A) Toutes les formules du n° 259 des exercices de M. *Boutin*, p. 107, donnent de nouvelles formules plus difficiles à démontrer directement; peut-être même ne penserait-on jamais à les rechercher *a priori*.

Nous poserons, pour abréger l'écriture :

$$\delta_a = 4R - r_a,$$

$$\sum_{nA} = (-1)^n \operatorname{tg}^n \frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^n \frac{B}{2} + \operatorname{cotg}^n \frac{C}{2},$$

$$\sum_{nA}' = (-1)^n \operatorname{cotg}^n \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^n \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^n \frac{C}{2}.$$

Les formules de M. *Boutin* donneront, respectivement, par *transformation continue* en A :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{C}{2} = \frac{\delta_a^2}{(p-a)^2} - 2,$$

$$\sum_{3A} = \frac{\delta_a^2 - 12R(p-a)^2}{(p-a)^2},$$

$$\operatorname{tg}^4 \frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^4 \frac{B}{2} + \operatorname{cotg}^4 \frac{C}{2} = \frac{\delta_a^4}{(p-a)^4} - \frac{16.R\delta_a}{(p-a)^2} + 2,$$

. . . .

$$\operatorname{cotg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{(p-a)^2 + 2r_a\delta_a}{r_a^2},$$

$$\sum_{3A}' + \frac{(p-a)^3 + 12R.S}{r_a^3} = 0,$$

. . . .

$$\sum_{nA} = \frac{\delta_a}{p-a} \sum_{(n-1)A} - \sum_{(n-2)A} - \frac{r_a}{p-a} \sum_{(n-3A)},$$

$$\sum'_{nA} + \frac{p-a}{r_a}\sum'_{(n-1)A} + \frac{\delta_a}{r_a}\sum'_{(n-2)A} + \frac{p-a}{r_a}\sum'_{(n-3)A} = 0.$$

On déduirait aussi ces formules de l'équation

$$X^3 - \frac{\delta_a}{p-a}X^2 + X + \frac{r_a}{p-a} = 0.$$

qui a pour racines: $-\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$.

On aurait des formules analogues en faisant la *transformation continue* en B et en C.

(B) La question 388 de M. *Mannheim*, résolue page 112, traitée par *transformation continue en* A, se reproduit; mais, par transformation en B ou en C, on a l'énoncé suivant:

On donne un triangle abc. *Du sommet* a *on mène la médiane* am *qui aboutit au milieu* m *de* bc *et la bissectrice extérieure* al' *qui rencontre la base* bc *au point* l'. *Du point* l' *on élève une perpendiculaire à la bissectrice* al'; *cette droite coupe la médiane au point* p' *et le côté* ab *au point* q'. *Démontrer que la perpendiculaire abaissée de* p' *sur* bc, *et la perpendiculaire élevée de* q' *à* ab *se coupent sur la bissectrice* al'.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(Novembre 1892.)

1° Démontrer que si a est compris entre 2 et 5 (par exemple si $a = 3$ l'expression

$$x^2 - 4ax + 3a^2 + 7a - 10$$

sera positive quelle que soit la valeur attribuée à x.

2° A un point fixe A est attachée l'extrémité A d'un fil AB dont on néglige le poids. Ce fil a 1 mètre de longueur. A l'extrémité B est attaché un poids de 4 kilogr.; à ce même point B est appliquée une force horizontale égale à 3 kilogr. On demande à quelle distance le point B se trouve de la verticale du point A lorsque l'equilibre est établi.

Etant donné un arc de cercle, trouver, sur cet arc, la position d'un point M tel que la somme AM + BM soit aussi grande ou aussi petite que possible. Discussion. Construction.

I. Étant données deux progressions qui définissent un système de logarithmes

$$\begin{cases} 1 : q : q^2 : q^3. \;\ldots \\ 0 . r . 2r . 3r, \end{cases}$$

comment définit-on le logarithme d'un nombre N non compris parmi les termes de la progression géométrique?

II. Étant donné la relation

$$y = \frac{5 + x^2}{2 + x},$$

comment varie y quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$?

Résoudre le système d'équations :

$$\frac{k^2 x}{x^2 + y^2} = a,$$

$$\frac{k^2 y}{x^2 + y^2} = b.$$

Construire les solutions, en supposant que les données a, b et k représentent trois longueurs.

Examiner le cas particulier où $b = 0$.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

I. — Dans un triangle on donne a, A, et le produit $b(b + c) = k^2$: 1° Déterminer par le calcul b et c. — Discussion. — 2° Traiter la même question, géométriquement, sans calcul.

II. — On donne un triangle ABC et, dans l'espace, une droite indéfinie X'AX passant par A et faisant avec AB et AC les angles β et γ. Un point M se meut sur la droite X'AX. Étudier la variation du rapport $\frac{MB}{MC}$. — Montrer que les positions remarquables du point M sont les points de rencontre à la droite X'AX avec la sphère qui a son centre sur cette droite et qui passe par les points B et C.

BIBLIOGRAPHIE

La Géométrographie ou l'art des constructions géométriques, par M. Emile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique (Gauthier-Villars, 1892 ; prix 2 fr.).

Depuis quelques années (*), M. Lemoine, dans des Notes diverses (**), poursuit la solution de ce problème: *Étant donnés plusieurs tracés géométriques permettant de résoudre un problème déterminé, trouver quel est le plus simple d'entre eux.* Dans le Mémoire que nous voulons analyser ici, M. Lemoine aborde aussi un second problème et il se demande quel est le plus *exact* de ces tracés. Il résout ces deux problèmes en calculant, sur chaque tracé, deux nombres qu'il a nommés *coefficient de simplicité* et *coefficient d'exactitude.* L'espace nous manque pour exposer ici, avec détails, la méthode de M. Lemoine; nous voulons seulement indiquer l'idée fondamentale qui sert de base à la Géométrographie.

Que faut-il entendre par ces mots *un tracé plus simple qu'un autre?* Il y a, M. Lemoine l'observe avec raison dans la préface de son Mémoire, deux sortes de simplicités ; l'une, qu'on pourrait nommer la *simplicité théo-*

(*) C'est au Congrès d'Oran, en 1888, que M. Lemoine a présenté la première Note relative à ce sujet.

(**) L'une d'elles a été publiée dans le *Journal* (V. 1889, p. 10, 33). La dernière, croyons-nous, se trouve dans les *Nouvelles Annales*, 1892, p. 453.

rique, résulte, tout à la fois, de la rapidité avec laquelle la solution cherchée se trouve démontrée et du petit nombre de termes qui nous servent à la traduire dans un énoncé, dont la forme nous frappe par sa concision et sa netteté. Cette double impression ressentie par nous devant l'exposition d'une solution nous fait dire que cette solution est simple ou, dans d'autres cas, qu'elle est compliquée. Mais cette simplicité n'est pas celle qu'envisage M. Lemoine dans sa Géométrographie. Il prend sur un problème donné, par exemple (*), sur le problème d'Apollonius relatif au tracé de la circonférence qui touche trois circonférences données, diverses solutions proposées et, sur chacune d'elles, après avoir analysé les tracés qu'elle comporte, il en déduit la détermination de deux coefficients numériques; l'un, nous l'avons dit déjà, est le *coefficient de simplicité*; l'autre, le *coefficient d'exactitude*. Peu lui importe que les tracés aient été obtenus par des considérations plus ou moins compliquées. Il les prend pour ainsi dire en eux-mêmes, abstraction faite de leur origine et des difficultés théoriques qu'on a pu rencontrer pour les établir.

Ce point de départ est incontestablement juste. Une épure sera, pour l'exécutant, d'autant plus simple que le nombre des constructions qu'il doit exécuter dans ses tracés sera plus restreint; il n'a pas à se soucier si la solution qui, au point de vue pratique, est manifestement plus rapide qu'une autre, exige pour être comprise un plus grand effort.

Le postulatum, la convention fondamentale, je ne sais comment désigner au juste ce que M. Lemoine propose d'accepter, s'obtient comme nous allons l'expliquer, comme critère de la simplicité.

M. Lemoine, devant un tracé qui lui est donné et dont on lui demande (**) le coefficient de simplicité, recherche les *opérations élémentaires* qu'elle comporte et qu'il réduit à 5 (***).

1° *Mettre le bord de la règle en coïncidence avec un point;*
2° *Tracer la ligne droite;*
3° *Mettre une pointe de compas en un point déterminé;*
4° *Mettre une pointe de compas en un point indéterminé d'une ligne;*
5° *Tracer la circonférence.*

Tout tracé comporte un certain nombre l_1 d'opérations du premier genre; un nombre l_2 d'opérations de la deuxième espèce; etc...

$l_1 + l_2 + \dots$ représente le coefficient de simplicité du tracé.

Cette convention est-elle indiscutable? Assurément non, et M. Lemoine l'a très bien observé quand il dit, à la page 5 de l'opuscule que nous analysons ici: « Comment apprécier qu'une construction $5C_3$ *(tracé de cinq circonférences)* est plus ou moins simple que $50R_2$ *(tracé de cinquante*

(*) V. *Nouvelles Annales (loc. cit.).*

(**) J'allais écrire *dont on lui demande de mesurer la simplicité*. L'expression n'eût pas été exacte, bien qu'elle corresponde à l'idée qu'on peut se faire de la méthode que nous analysons ici. M. Lemoine ne *mesure* pas la simplicité d'une construction, au sens vrai du mot, puisqu'il n'y a pas d'unité pouvant servir de base à cette mesure. Il calcule seulement, par une règle adoptée une fois pour toutes, et que nous donnons plus loin, un certain nombre; ce nombre exprime, au sens attribué à ce mot par M. Lemoine, la simplicité de la construction.

(***) Dans une lettre adressée à M. Rouché (*Nouvelles Annales*, numéro d'avril 1893), M. Soudée propose d'introduire l'équerre parmi les instru-

(droites puisque les unités C_3, R_2, sont, par essence, de nature différente ? »

Ce coefficient de simplicité

$$l_1 + l_2 \ldots,$$

nombre, qui, dans la pensée de M. Lemoine, doit donner à l'esprit une idée de la simplicité relative des constructions, est formé en ajoutant les unités de l_1, avec celles de l_2,... De sorte que l'opération n° 2 (tracer la ligne droite, la règle étant posée) a, sur le résultat final, la même influence que l'opération n° 5 (tracer la circonférence, le compas étant placé). Il en résulte que deux constructions étant comparées ; si, dans l'une, on a dû appliquer : quatre fois l'opération n° 2 ; une fois, l'opération n° 5 ; tandis que dans l'autre on applique : quatre fois, l'opération n° 5 ; une fois l'opération n° 2 ; on trouvera, les autres tracés étant les mêmes, que les deux constructions sont aussi simples.

Est-il absolument juste de donner la même influence au tracé d'une droite ou à celui, sensiblement plus délicat, du tracé d'une circonférence ? Nous posons ici la question, après M. Lemoine. Peut-être y aura-t-il lieu de modifier la formule qui sert à l'évaluation de la simplicité en affectant, de certains coefficients les tracés élémentaires ; mais on ne peut raisonnablement dire, M. Lemoine en convient tout le premier, qu'un tracé effectué avec cinq circonférences soit aussi simple qu'un tracé exigeant cinq droites.

Quoi qu'il en soit, les récents travaux de M. Lemoine se rapportent à un problème intéressant, que nul n'avait soulevé avant lui ; et, si la solution proposée par notre collaborateur et ami donne lieu à certaines réformes, il sera le premier à s'applaudir de voir la discussion qu'elle doit provoquer, ouverte dans ce *Journal.*

Il n'y a pas à contester, dans tous les cas, le mérite de la méthode de M. Lemoine. En acceptant le critère qu'il propose, le plus simple assurément parmi ceux qui se présentent tout d'abord à l'esprit, on est conduit à comparer entre elles les diverses solutions proposées pour un problème donné. Cet examen critique auquel sera soumis le tracé d'une solution géométrique aura plus d'une heureuse conséquence. Il excitera, notamment, les recherches dans une voie qui n'avait pas encore été indiquée, du moins avec netteté, et l'on arrivera, même dans les problèmes classiques, à des solutions nouvelles préférables à celles qu'on avait données jusqu'ici. Le lecteur, en se reportant à l'article publié plus haut et surtout au travail que nous venons d'analyser (p. 130) vérifiera facilement l'exactitude du fait que nous avançons ici. *G. L.*

---

ments qui servent aux tracés géométriques. Cet instrument, qu'on rejette généralement dans le tracé des perpendiculaires est pourtant d'un emploi constant pour celui des parallèles. Mais cette lacune pourra être facilement réparée, en ajoutant, comme le propose M. Soudée *(loc. cit.)* aux opérations élémentaires énumérées ci-dessus, les deux suivantes :

6° *Appliquer la règle contre l'équerre :*

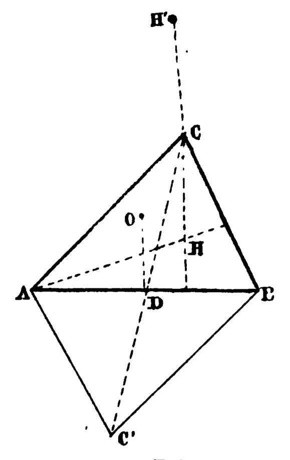
7° *Faire passer le bord de l'équerre par un point donné.*

M. Soudée s'est d'ailleurs, sans le savoir, rencontré avec M. Lemoine qui, en 1888, au Congrès d'Oran et à l'Académie des sciences (séance du 16 juillet 1888), a précisément indiqué, comme nécessaires, ces deux opérations élémentaires.

QUESTION 458

Solution par Mme veuve F. PRIME.

Démontrer que le point symétrique de l'orthocentre, par rapport à l'un quelconque C des sommets d'un triangle ABC, le centre du cercle circonscrit et le sommet C' du parallélogramme construit sur les deux côtés CA, CB sont en ligne droite, et que le centre du cercle circonscrit est le milieu de la distance des deux autres points.



Soient H' le symétrique de H par rapport à C,

O le centre du cercle circonscrit,

D le milieu du côté AB.

Le point D est aussi le milieu de CC', et, l'on voit que

$$DO = \frac{HC}{2}.$$

La droite DO est donc parallèle à CH', dirigée dans le même sens, égale à sa moitié; le point O est donc le milieu de C'H'.

NOTA. — Solutions diverses par MM. VAZOU, professeur au collège de Falaise; J. HAIS, répétiteur au collège d'Étampes; A. DROZ-FARNY; GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille; E. FOUCART, élève au lycée Michelet.

QUESTION 450

Solution par M. Elie PERRIN.

Résoudre le système des trois équations :

$$(1) \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y-z} = \frac{1}{b+c},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{z-x} = \frac{1}{b},$$

$$(3) \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{x-y} = \frac{1}{c}.$$

(Lauvernay.)

On a
$$(b + c)(x + y - z) = x(y - z),$$
$$b(-x + y + z) = x(z - x),$$
$$c(x - y + z) = z(x - y),$$
et, par addition, $cx + by = 0$.

Posons $\frac{x}{b} = \frac{y}{-c} = \lambda$; l'équation (3) donne
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{c} - \frac{1}{x - y} = \frac{\lambda(b + c) - c}{\lambda c(b + c)}.$$

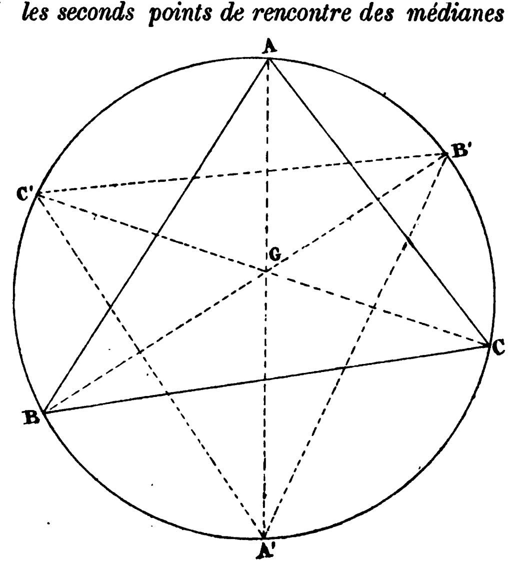
Portant les valeurs de x, de y, de z, en fonction de λ, dans l'une des équations (1), (2), on trouve, pour déterminer λ, l'équation
$$\lambda^2 bc(b + c) + \lambda[(b + c)^2(b - c) + b^2 c] - 2bc(b + c) = 0,$$
dont les racines sont toujours réelles, car la quantité placée sous le radical peut s'écrire
$$(b^3 + 2b^2 c + bc^2 + c^3)^2 + 4b^2c^2(b^2 + bc + c^2).$$

Désignons par λ_1, λ_2 les racines réelles de cette équation, nous aurons pour chacune de ces valeurs de λ, un système de solutions, et un seul. En tout, deux systèmes.

QUESTION 456

Solution par M. Hais, répétiteur au Collège d'Étampes.

Soient A′, B′, C′ *les seconds points de rencontre des médianes d'un triangle avec la circonférence circonscrite, et soient* a_1, b_1, c_1 *les longueurs des cordes* B′C′, C′A′, A′B′; *démontrer que l'on a*
$$\frac{am_a}{a_1} = \frac{bm_b}{b_1} = \frac{cm_c}{c_1}.$$



Les triangles semblables GBC, GB′C′; GAC, GA′C′; donnent
$$\frac{GC'}{B'C'} = \frac{GB}{BC},$$
$$\frac{GC'}{C'A'} = \frac{GA}{CA}.$$

D'où,
$$\frac{C'A'}{B'C'} = \frac{GB}{GA} \cdot \frac{CA}{BC}.$$

On a donc

ou
$$\frac{am_a}{a_1} = \frac{bm_b}{b_1} \cdot \text{ etc.}$$

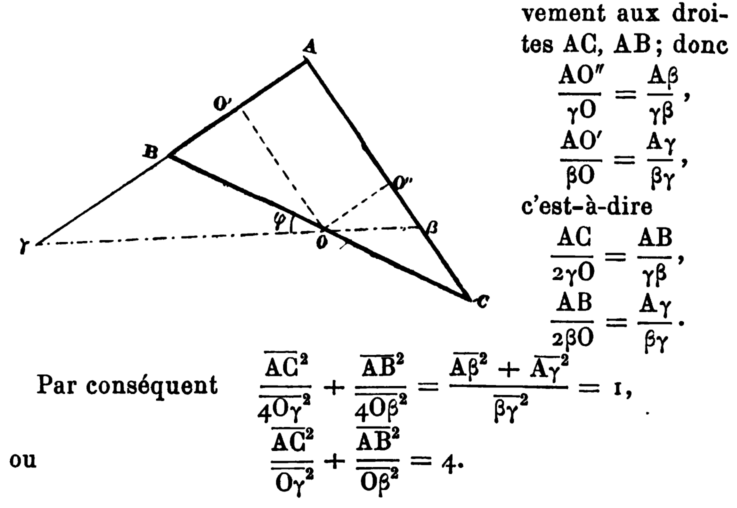
NOTA. — Solutions diverses par MM. GROLLEAU, maître répétiteur au lycée de Marseille; VAZOU, professeur au collège de Falaise; DROZ-FARNY; et Me Vve F. PRIME.

QUESTION 459

Solution par M. J. HAIS, répétiteur au collège d'Étampes.

Si, par le milieu O *de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on mène une transversale quelconque, rencontrant les côtés de l'angle droit* AC, AB *en* β *et* γ, *on a la relation*
$$\frac{b^2}{\overline{O\gamma}^2} + \frac{c^2}{\overline{O\beta}^2} = 4.$$

Soient O′ et O″ les milieux des côtés AB et AC du triangle; les droites OO′ et OO″ sont parallèles respectivement aux droites AC, AB; donc



$$\frac{AO''}{\gamma O} = \frac{A\beta}{\gamma\beta},$$
$$\frac{AO'}{\beta O} = \frac{A\gamma}{\beta\gamma},$$
c'est-à-dire
$$\frac{AC}{2\gamma O} = \frac{AB}{\gamma\beta},$$
$$\frac{AB}{2\beta O} = \frac{A\gamma}{\beta\gamma}.$$

Par conséquent
$$\frac{\overline{AC}^2}{4\overline{O\gamma}^2} + \frac{\overline{AB}^2}{4\overline{O\beta}^2} = \frac{\overline{A\beta}^2 + \overline{A\gamma}^2}{\overline{\beta\gamma}^2} = 1,$$

ou
$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{O\gamma}^2} + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{O\beta}^2} = 4.$$

Autrement (*)

Désignons l'angle en O par φ; les deux triangles $BO\gamma$, $CO\beta$ donnent

$$O\gamma = \frac{a \sin B}{2 \sin (B - \varphi)}, \qquad O\beta = \frac{a \sin C}{2 \sin (C + \varphi)}.$$

On a donc

$$\frac{b^2}{\overline{O\gamma}^2} + \frac{c^2}{\overline{O\beta}^2} = \frac{4b^2(\sin B \cos\varphi - \sin\varphi \cos B)^2}{a^2 \sin^2 B} + \frac{4c^2(\sin C \cos\varphi + \sin\varphi \cos C)^2}{a^2 \sin^2 C}$$

$$= \frac{16R^2}{a^2}[(\sin B \cos\varphi - \sin\varphi \cos B)^2 + (\cos\varphi \cos B + \sin\varphi \sin B)^2]$$

$$= \frac{16R^2}{a^2}$$

En observant que $a = 2R$, le théorème en question se trouve établi.

Nota. — Solutions diverses par MM. Grolleau, répétiteur général au Lycée de Marseille; Droz-Farny; B. Sollertinsky; E. Foucart, élève au Lycée Michelet et Mme Ve F. Prime.

M. W. J. Greenstreet, B. A., démontre la proposition, en observant que l'on a successivement

$$O\gamma = OB \sin B \sin \gamma\beta O = \frac{1}{2} AC \cos \beta; \quad O\beta = \frac{1}{2} BC \sin \beta;$$

$$AC^2\, G\gamma^2 + BA^2\, O\gamma^2 = 4(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = 4.$$

M. Sollertinsky généralise le théorème de la manière suivante:

Généralisation. — *Si l'on divise le côté* BC *d'un triangle quelconque* ABC *dans le rapport* $\frac{BO}{OC} = \frac{m}{n}$, *toute transversale passant en* O *rencontrera* AB, AC *et la parallèle à* BC *menée par* A *aux points* γ, β, α *tels que*

$$mb^2\, O\beta + nc^2 O\gamma - mna^2 O\alpha = (m + n) O\alpha . O\beta . O\gamma.$$

QUESTION 455

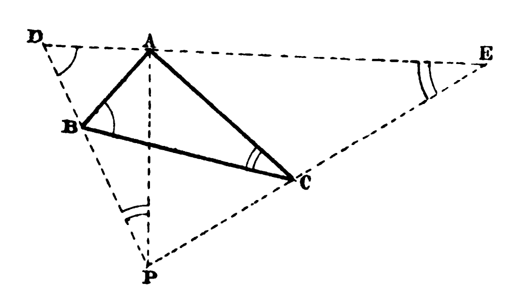
Solution par M. Vazou, professeur au Collège de Falaise.

Si, dans le plan d'un triangle rectangle on mène, par le sommet de l'angle droit une transversale quelconque, et par chacun des trois sommets, dans le même sens de rotation, des droites faisant chacune avec cette transversale un angle égal à l'angle du triangle correspondant à ce sommet, ces trois droites sont concourantes.

(Lauvernay.)

(*) Cette solution est de M. Vazou, professeur au collège de Falaise.

Soient PD et PE les droites qui, menées par B et C, font, avec les transversales, des angles $\widehat{D}$ et $\widehat{E}$; respectivement égaux à $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que PA est perpendiculaire à DE.



De la construction faite, il résulte que le quadrilatère ABPC est inscriptible; donc $\widehat{BPA} = \widehat{C} = \widehat{E}$.

Ainsi, les angles ADP, APD sont complémentaires; DAP est un angle droit. La proposition se trouve donc établie.

NOTA. — Solutions diverses par MM. DROZ-FARNY; E. FOUCART, élève au lycée Michelet; W. J. GREENSTREET; B. SOLLERTINSKY et Mme veuve F. PRIME.

QUESTIONS PROPOSÉES

515. — Résoudre le système d'équations

$$\frac{1}{by} + \frac{1}{cz} = \frac{a+x}{ax(a-x)}$$

$$\frac{1}{cz} + \frac{1}{ax} = \frac{b+y}{by(b-y)}$$

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} = \frac{c+z}{cz(c-z)}.$$

(*E. Lemoine*).

516. — Résoudre et discuter l'équation :

$$x^2(y^2 - 8ay + 18a^2) + 3ax(y^2 - 8ay + 9a^2) + 9a^2(y^2 - 2ay) = 0.$$

(*Lauvernay.*)

ERRATA. — Page 118, ligne 3, *au lieu de* quatre *lisez* cinq.
Page 117, remplacez l'énoncé de la question 498 par le suivant :
Le produit des distances des centres des cercles exinscrits est égal au périmètre du triangle multiplié par huit fois le carré du rayon de cercle circonscrit.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11874-5-93.

PROBLÈMES RELATIFS A LA NUMÉRATION
(A PROPOS DE LA QUESTION 492)

Par M. M. d'Ocagne.

La question 492 se trouve résolue, à titre de cas particulier, dans une Note que j'ai publiée, il y a plusieurs années, dans le *Jornal de Sciencias mathematicas* de M. Gomes Teixeira (année 1886, p. 124). Cette Note, contenant divers autres problèmes qui sont de nature à intéresser les lecteurs du *Journal de Mathématiques élémentaires*, j'ai cru devoir en extraire, à l'usage de ceux-ci, les passages suivants.

I

Combien y a-t-il de chiffres dans la suite des nombres, de 1 à N, inclusivement?

Écrivons, les uns au-dessous des autres, les N premiers nombres. N étant supposé avoir m chiffres, complétons tous les nombres du tableau en leur ajoutant des zéros sur la gauche, de façon à les composer tous de m caractères. Enfin, ajoutons, en tête de cette liste une ligne de m zéros.

Pour avoir le nombre cherché, il faut évaluer le nombre total des caractères figurant au tableau ainsi formé et en retrancher le nombre de zéros qu'on y a ajoutés.

Or, le premier de ces deux nombres est évidemment

$$m(N + 1).$$

Passons au nombre des zéros.

De 10^{m-1} à N, nous n'en avons point ajouté. Maintenant, au-dessous de 10^{m-1}, dans la première colonne de gauche, nous avons ajouté 10^{m-1} zéros; au-dessous de 10^{m-2}, dans la deuxième colonne, nous en avons ajouté 10^{m-2}; etc...; au-dessous de 10, dans la deuxième colonne de droite, nous en avons ajouté 10; au-dessous de 1, dans la première colonne de droite, nous en avons ajouté 1. Nous en avons donc ajouté en tout

$$10^{m-1} + 10^{m-2} + \dots + 10 + 1,$$

c'est-à-dire $\frac{10^m - 1}{9}$,

et le nombre cherché X est donné par l'égalité

$$X = m(N+1) - \frac{10^m - 1}{9}.$$

« Cette formule peut se traduire en langage ordinaire de la manière suivante :

Pour savoir combien il y a de chiffres dans la suite des N *premiers nombres, il suffit de multiplier le nombre* N + 1 *par le nombre des chiffres qui entrent dans le nombre* N, *et de retrancher, du produit, un nombre formé d'autant de* 1 *qu'il y a de chiffres dans le nombre* N.

Par exemple, dans la suite des 365 premiers nombres il y aura

$$3 \times 366 - 111 = 1098 - 111$$
$$= 987 \text{ chiffres.} »$$

II

Applications. — Convenons d'abord des notations suivantes : $(n \mid 1)$ est un nombre exclusivement composé de n chiffres 1. Ainsi $(4 \mid 1)$ est le nombre 1111.

$N(n)$ est un nombre ainsi composé : écrire le nombre n, à sa droite n chiffres 8 consécutifs, et, à la droite du tout, le chiffre 9. Ainsi

$$N(1) = 189,$$
$$N(2) = 2889,$$
$$N(3) = 38889,$$
$$\cdots\cdots$$

Voici maintenant quelle est l'application que nous avons en vue :

Déterminer, dans la suite naturelle des nombres, le k^me *chiffre écrit.*

Remarquons d'abord que, si dans la formule précédente on fait

$$N = 10^m - 1 = \overbrace{999\cdots99}^{m},$$

on trouve que, dans la suite naturelle des nombres, de 1 à $10^m - 1$, inclusivement, il y a $N(m-1)$ chiffres (*).

Dès lors, si l'on a

$$N(m-2) < k \leqslant N(m-1),$$

(*) Telle est la réponse à la question 492.

le nombre auquel appartient le chiffre cherché, de rang k, est composé de m chiffres. Cette double inégalité permet d'obtenir immédiatement le nombre m.

Cela posé, si N est le nombre auquel appartient, dans la suite naturelle, le chiffre cherché, on a

$$mN - (m \mid 1) < k \leqslant m(N + 1) - (m \mid 1),$$

ou

$$N < \frac{k + (m \mid 1)}{m} \leqslant N + 1,$$

d'où l'on déduit immédiatement que si Q est le quotient entier et R le reste de la division de $k + (m \mid 1)$ par m :

1° *Lorsque* R *n'est pas nul, le chiffre demandé est le* R^{me}, *à partir de la gauche, du nombre* Q.

2° *Lorsque* R *est nul, le chiffre demandé est le premier à droite du nombre* $Q - 1$.

Exemple. — Quel est le 123 456 789me chiffre écrit? On voit ici que $m = 8$, et l'on a

$$123\,456\,789 + 11\,111\,111 = 134\,567\,900.$$

Divisant ce dernier nombre par 8, on trouve

$$Q = 16\,820\,987,$$
$$R = 4.$$

Le 123 456 789me chiffre écrit, dans la suite naturelle des nombres, est donc le 4me du nombre 16 820 997, soit le chiffre 2.

III

Proposons-nous maintenant de déterminer *la somme des chiffres des* N *premiers nombres*, somme que nous représenterons par la notation σ (N).

Nous indiquerons, par un indice, la plus haute puissance de 10 contenue dans le nombre N. Si l'exposant de cette puissance est p, le nombre N_p aura $p + 1$ chiffres $a_p, a_{p-1}, \ldots a_1, a_0$ et s'écrira

$$a_p\, a_{p-1} \ldots a_1\, a_0;$$

de sorte que

$$N_p = a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Retranchons le dernier chiffre de gauche; nous obtenons le nombre

$$a_{p-1}\, a_{p-2} \ldots a_1\, a_0,$$

que nous représenterons par N_{p-1}. De même :

$$
\begin{array}{rcccl}
a_{p-2}\,a_{p-3}\,\ldots\,a_0 & \text{sera désigné par} & & & N_{p-2},\\
a_{p-3}\,\ldots\,a_0 & — & — & & N_{p-3},\\
\ldots & & & & \\
a_1\,a_0 & — & — & & N_1,\\
a_0 & — & — & & N_0.
\end{array}
$$

Lemme. — Les sommes des chiffres des dix premières dizaines

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & \ldots\ldots & 9,\\
10 & 11 & 12 & \ldots\ldots & 19,\\
\ldots & & & & \\
90 & 91 & 92 & \ldots\ldots & 99,
\end{array}
$$

sont, respectivement :

$$
\begin{array}{r}
45,\\
10 + 45,\\
2 \times 10 + 45,\\
\ldots\\
9 \times 10 + 45;
\end{array}
$$

et la somme totale est

$$10 \times 2 \times 45$$

D'après cela, les sommes des chiffres des dix premières centaines

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & \ldots\ldots & 99,\\
100 & 101 & 102 & \ldots\ldots & 199,\\
\ldots & & & & \\
900 & 901 & 902 & \ldots\ldots & 999,
\end{array}
$$

sont, respectivement :

$$
\begin{array}{r}
10 \times 2 \times 45,\\
100 + 10 \times 2 \times 45,\\
2 \times 100 + 10 \times 2 \times 45,\\
\ldots\\
9 \times 100 + 10 \times 2 \times 45;
\end{array}
$$

et la somme totale est

$$100 \times 3 \times 45.$$

La formule se généralise immédiatement, et l'on a

$$\sigma(10^p - 1) = 10^{p-1} \times p \times 45.$$

De là, on déduit

$$
\begin{array}{rlr}
\sigma(a_p . 10^p - 1) = & & 10^{p-1} \times p \times 45\\
+ & 10^p + & 10^{p-1} \times p \times 45\\
+ & 2 \times 10^p + & 10^{p-1} \times p \times 45\\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

$$+ (a_p - 1)\, 10^p + 10^{p-1} \times p \times 45,$$

ou $$\sigma(a_p . 10^p - 1) = 10^{p-1}\left[10 \frac{(a_p - 1)\, a_p}{2} + 45 p\, a_p\right],$$

ou encore

(1) $$\sigma(a_p . 10^p - 1) = 10^{p-1} . 5 a_p (a_p - 1 + 9p).$$

Tel est le lemme que nous voulions établir.

Solution. — Il est clair que la somme $\sigma(N_p)$ peut se décomposer ainsi :

$$\sigma(N_p) = \sigma(a_p 10^p - 1) + (N_{p-1} + 1)\, a_p + \sigma(N_{p-1}).$$

Donc, eu égard à la formule (1),

$$\sigma(N_p) - \sigma(N_{p-1}) = a_p[10^{p-1} . 5 (a_p - 1 + 9p) + N_{p-1} + 1].$$

Par suite, de même,

$$\sigma(N_{p-1}) - \sigma(N_{p-2}) = a_{p-1}[10^{p-2} . 5\, | a_{p-1} - 1 + 9(p-1) | + N_{p-2} + 1]$$

. . . .

$$\sigma(N_1) - \sigma(N_0) = a_1[5(a_1 - 1 + 9) + N_0 + 1].$$

Faisant la somme des p égalités précédentes, et observant que $\sigma(N_0) = \frac{a_0(a_0 + 1)}{2}$, on obtient

(2) $$\sigma(N_p) = \frac{a_0(a_0 + 1)}{2} + \sum_{i=1}^{i=p} a_i[10^{i-1} . 5 (a_i - 1 + 9i) + N_{i-1} + 1].$$

Telle est la formule qui résout la question proposée.

On peut, à l'occasion de cette formule, faire diverses remarques.

Par exemple : *Si le chiffre des unités du nombre* N *est* 0, 3, 4, 7 *ou* 8, *et si tous les autres chiffres sont pairs, la somme des chiffres des* N *premiers nombres est paire.*

Si le chiffre des unités du nombre N *est* 9, *la somme des chiffres des* N *premiers nombres est divisible par* 5.

Etc., etc.

Exemples d'application de la formule (2).

1° Somme des chiffres des 19 premiers nombres.

$$p = 1, \quad N_1 = 19, \quad N_0 = 9, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 9.$$
$$\sigma(19) = 45 + 45 + 10$$
$$= 100.$$

2° Somme des chiffres des 100 premiers nombres.

$$p = 2, \quad N_2 = 100, \quad N_1 = 0, \quad N_0 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 0,$$
$$\sigma(100) = 50 \times 18 + 1$$
$$= 901.$$

DEUX PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

par M. Paul Girardville,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

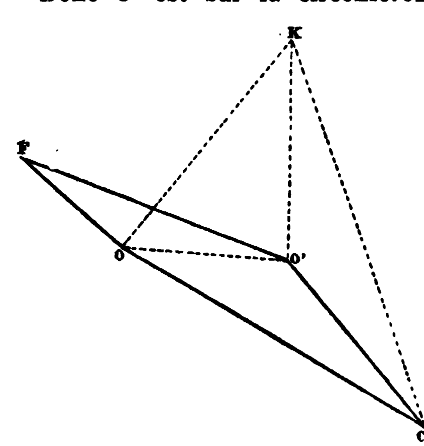
QUESTION AUXILIAIRE. — *Construire un quadrilatère* OCO′F *connaissant les quatre côtés* OC, CO′, O′F, FO *et sachant que deux angles opposés* C, F *de ce quadrilatère ont une somme ou une différence donnée.*

Imaginons que l'on construise sur CO′ *(fig. 1)* le triangle O′CK semblable à OFO′. Le triangle OCK est connu, puisque l'on connaît CO, $CK = O'F.\frac{CO'}{OF}$ et que l'angle OCK est la somme donnée des deux angles OCO′ et O′CK = OFO′.

Les triangles semblables OFO′, O′CK donnent d'ailleurs

$$\frac{OO'}{O'K} = \frac{OF}{CO'}.$$

Donc O′ est sur la circonférence lieu géométrique des points dont les distances à O et à K sont dans le rapport $\frac{OF}{CO'}$, mais il est aussi sur la circonférence de centre C et de rayon CO′; il est donc déterminé, et le problème s'achève immédiatement.



La solution serait tout à fait analogue si, au lieu de la somme des angles OFO′, OCO′, on donnait leur différence.

REMARQUE. — On résoudrait exactement par le même moyen la question suivante :

Construire deux triangles sachant qu'ils ont une base égale (non donnée), *connaissant leurs autres côtés et la somme ou la différence des angles opposés aux bases.*

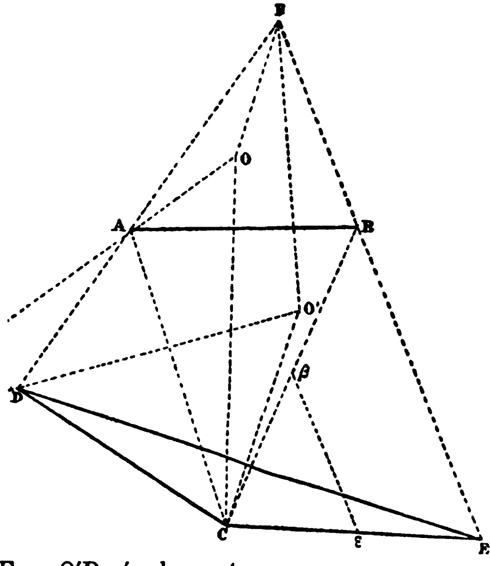
On n'a qu'à les imaginer placés de façon à avoir leurs bases en coïncidence pour voir que c'est une autre forme de l'énoncé primitif.

PREMIER PROBLÈME

On donne deux points A *et* B; *un triangle* DEC, *dans le même plan que* A *et* B, *tourne autour de son sommet* C *fixe, et l'on demande de placer ce triangle de façon que l'angle des droites* DA *et* EB *soit donné.*

Ce problème est assez connu; nous le trouvons par exemple posé en 1869, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, par M. *E. Lemoine* (question 910), et résolu dans le même Recueil en 1871, pages 235 et 237, par M. J. G. et par M. *Gerono*.

La solution suivante, très simple, ne nous paraît pas avoir été remarquée.



Supposons (*fig.* 2), le problème résolu, c'est-à-dire le triangle DCE placé.

Soit O le centre de l'arc capable de AFB décrit sur AB; traçons OF, OA qui sont connus en grandeur et OA en position.

Soit O' le centre de l'arc capable de AFB décrit sur DE, traçons O'D, O'C, G'F; O'C est connu en grandeur et $O'F = O'D$ également.

On a les égalités d'angles :

$$O'FO = O'FD - OFA = O'DF - OAF$$

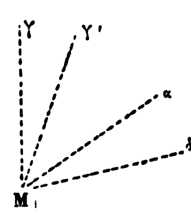
c'est-à-dire que l'angle $O'FO$ est égal à l'angle que les deux droites $O'D$, OA font entre elles.

Cela posé, menons, par un point M quelconque : $M\delta$, $M\alpha$, $M\gamma'$ $M\gamma$ parallèles respectivement à DO', AO, CO', CO.

L'angle $\gamma M\alpha$ est l'angle des deux droites fixes CO et AO.

L'angle $\gamma' M\delta$ ou l'angle des deux droites CO′ et DO′ est connu. Ces deux angles ont une partie commune $\gamma' M\alpha$, donc la différence de ces parties non communes $\gamma' M\gamma - \alpha M\delta$ est égale à $\gamma M\alpha - \gamma' M\delta$.

$\gamma' M\gamma$ est égal à l'angle O′CO, $\alpha M\delta$ est égal à l'angle des deux droites AO et O′D, angle qui est égal à OFO′, comme nous l'avons fait observer.



La différence des angles en C et en F — ou leur somme, ainsi qu'on le voit facilement sur une autre position de la figure — du quadrilatère COFO′ est donc connue; nous avons d'ailleurs les longueurs des quatre côtés et le problème auxiliaire nous apprend à le déterminer.

L'achèvement de la construction n'offre aucune difficulté.

Observons que, si l'on suppose l'angle DFE tracé d'abord sur le plan, C appartient au lieu des points décrits par le sommet C du triangle ACB dont les sommets A et B glissent respectivement sur FD et sur FE, et aussi au lieu des points décrits par le sommet C du triangle DCE dont les deux sommets D et E glissent respectivement sur les mêmes droites. Ces deux lieux étant des ellipses ayant F pour centre, on déduit de ce qui précède une détermination géométrique du point d'intersection de deux ellipses concentriques. M. J. G. *(loco citato)* avait aussi donné la solution du problème qui nous occupe, d'après cette propriété.

SECOND PROBLÈME

On donne deux points A, B. *Un triangle* DEC *de grandeur invariable tourne autour de son sommet* C *fixe; placer ce triangle de façon que le rapport* $\frac{DA}{EB}$ *soit égal à une quantité donnée* m.

Prenons, sur CE *(fig. 2)*, le point ε tel que $\frac{C\varepsilon}{CE} = m$; traçons CB, CA; puis, par ε, menons une parallèle à BE, laquelle rencontre CB en β.

La longueur $C\varepsilon$ est connue, β est déterminé de position; de plus, $\beta\varepsilon$ est égal à AD, car on a $\frac{\beta\varepsilon}{EB} = m = \frac{DA}{EB}$.

Les triangles DAC, $\beta C\varepsilon$ ont donc une base égale $DA = \beta\varepsilon$; leurs autres côtés sont donnés, la somme de leurs angles opposés aux bases est connue, car elle est égale à DCE — ACB; on peut donc construire ces triangles; par suite, DA étant connu, on peut placer le point D, etc.

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$

ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. **A. Aubry.**

(*Suite*, voir page 121).

---

21. — Dans la seconde inégalité (3) du n° 9, changeons x en $\frac{x}{1-x}$; il viendra

$$(4)\quad (1+x)^{\frac{1}{m}} < 1 + \frac{x}{m} < \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{m}}, \qquad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$$

Changeons successivement $\frac{1}{m}$ en $\frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots \frac{m}{m}$ et multiplions; il vient

$$(5)\quad (x+1)^{\frac{m+1}{2}} < \left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1+\frac{2x}{m}\right)\ldots(1+x) < \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{m+1}{2}}.$$

Posant $\qquad x = \frac{m}{z}, \quad (m < z)$

$$(6)\left(\frac{z+m}{z}\right)^{\frac{m+1}{2}} < \left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{2}{z}\right)\ldots\left(1+\frac{m}{z}\right) < \left(\frac{z}{z-m}\right)^{\frac{m+1}{2}}$$

Soit par exemple à évaluer le produit

$$P = 1{,}00001 \,.\, 1{,}0002 \,.\, 1{,}00003 \ldots . \, 1{,}00065.$$

On a $\qquad \left(\frac{100\,065}{100\,000}\right)^{22} < P < \left(\frac{100\,000}{99\,935}\right)^{33},$

ou, en calculant par logarithmes,

$$1{,}02167 < P < 1{,}02169$$

ce qui donne $P = 1{,}02168\ldots$

On pourra se contenter de l'emploi de la relation (2) du n° 9 si le rapport $\frac{m}{z}$ est très petit : on a ainsi, *a fortiori*, la relation

$$1 + \frac{m(m+1)}{2z} < \left(1 + \frac{1}{z}\right)\left(1 + \frac{2}{z}\right)\ldots$$

$$(7) \qquad \left(1 + \frac{m}{z}\right) < 1 + \frac{m(m+1)}{2z - m(m+1)}$$

qui donne, dans le cas de l'exemple numérique précédent,

$$1{,}0214 < P < 1{,}0219$$

approximation déjà notable.

La première inégalité (6) est due à Cauchy (*).

22. — Soit α une valeur approchée de la racine x de l'équation $x^m + px - q = 0$, et soit $x = \alpha \pm h$, on aura, α étant supposé positif et m quelconque, mais supérieur à 1,

$$\frac{x^m - \alpha^m}{h} > m\alpha^{m-1} \qquad \text{ou} \qquad m\alpha^{m-1} > \frac{\alpha^m - x^m}{h};$$

d'où, en ajoutant p aux deux membres

(*) Considérons la progression arithmétique $a.\, b \ldots k.\, l$, de raison r; et soient f et h deux termes également éloignés des extrêmes : $f + r$ est le terme qui suit f et $h - r$ celui qui précède h. Or on a

$$(f+r)(h-r) = fh + r(h - f - r) > fh.$$

On a donc

$$(\alpha) \qquad al < bk < cj < \ldots$$

D'un autre côté, soient $f + h = a + l = 2\alpha$, $h - f = 2\beta$, on aura $h = \alpha + \beta$, $f = \alpha - \beta$, d'où

$$(\beta) \qquad fh = \alpha^2 - \beta^2 < \left(\frac{a+l}{2}\right)^2$$

Posons maintenant $P = abc \ldots kb$. On a

$$P^2 = (al)(bk)(cj)\ldots(jc)(kb)(la);$$

les relations (α) et (β) donnent ainsi $P^2 > (al)^m$ et $P^2 < \left(\frac{a+l}{2}\right)^{2m}$

d'où

$$(\gamma) \qquad \sqrt{(al)^m} < P < \left(\frac{a+l}{2}\right)^m.$$

soient $a = 1$, $r = \pm\frac{1}{z}$, $l = m + 1$. Cette dernière relation devient

$$(\delta) \qquad \left(1 \pm \frac{m}{z}\right)^{\frac{m+1}{2}} < \left(1 + \frac{1}{z}\right)\ldots\left(1 + \frac{m}{z}\right) < \left(1 \pm \frac{m}{2z}\right)^{m+1}$$

$$\frac{(x^m + px) - (\alpha^m + p\alpha)}{h} > m\alpha^{m-1} + p,$$

ou $$m\alpha^{m-1} + p > \frac{(\alpha^m + p\alpha) - (x^m + px)}{h}$$

ce qui donne, en observant que $x^m + px = q$:

(8) $$h < \frac{q - \alpha^m - p\alpha}{m\alpha^{m-1} + p}, \quad \text{ou} \quad h > \frac{\alpha^m + p\alpha - q}{m\alpha^{m-1} + p}.$$

La quantité h, à ajouter à / à retrancher de la valeur, α étant supposée égale au second membre, on aura une seconde approximation α_1, qui sera, dans les deux cas, au-dessus de la vérité. Posons $x = \alpha_1 - h_1$, nous aurons de même

$$h_1 > \frac{\alpha_1^m + p\alpha_1 - q}{m\alpha_1^{m-1} + p},$$

ce qui donnera une nouvelle approximation $\alpha_2 = \alpha_1 - h_1$ par excès. En continuant ainsi, on se rapprochera de plus en plus de la valeur de la racine.

23. — Supposons $p = 0$, dans ce qui précède : on aura une nouvelle méthode d'extraction de la racine $\sqrt[m]{q}$, par des approximations successives, représentées par le tableau suivant :

(9)
$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\alpha}{m}\left(\frac{q}{\alpha^m} - 1\right),$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{m}\left(\frac{q}{\alpha_1^m} - 1\right).$$

. . . .

Par exemple, si $m = 2$, on aura les résultats connus :

$$\alpha_1 = \frac{q}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2},$$
$$\alpha_2 = \frac{q}{2\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{2}.$$

24. — Par certains calculs faciles, on peut toujours ramener l'extraction d'une racine quelconque à celle d'un nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et 2. Ainsi, par exemple :

$$(\alpha) \quad \sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = 1,4\sqrt{1 + \frac{1}{49}} = \frac{17}{12}\sqrt{1 - \frac{1}{289}} = \frac{41}{29}\sqrt{1 + \frac{1}{1681}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{7}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{26}{15}\sqrt{1 - \frac{1}{676}}, \quad \sqrt{5} = \frac{9}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \frac{38}{17}\sqrt{1 + \frac{1}{1444}}$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1 + \frac{3}{125}}, \quad \sqrt[3]{3} = \frac{13}{9}\sqrt{1 - \frac{1}{219,7}},$$

$$\sqrt[3]{5} = 1,7\sqrt[3]{1 + \frac{7}{4913}}.$$

On peut appliquer aux radicaux ainsi déterminés les formules (2) ou (3), qui donneront une première approximation α d'autant plus grande que la quantité sous le radical sera, elle-même, plus voisine de 1. On continuera ensuite par l'emploi des formules (9). *(A suivre.)*

UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE (*)

Le problème que nous nous proposons de résoudre correspond à l'énoncé suivant :

Deux droites Δ, Δ' *étant données, on propose de trouver, sur* Δ, *les points* A, B, C,... *tels que leur perspective faite, du*

(*) Ce problème nous a été inspiré par la lecture d'une brochure intitulée : *Principes fondamentaux de la photogrammétrie; nouvelles solutions du problème d'altimétrie au moyen des règles hypsométriques* et dont l'auteur est M. Monet, ingénieur civil, l'un de nos anciens élèves.

La photogrammétrie, comme je l'ai appris par cette brochure, est la science qui a pour but la mesure, sur une perspective photographique, des dimensions réelles des objets qui y figurent.

Cette science, d'après les renseignements que j'emprunte à l'Avant-propos de la brochure de M. Monet, a été créée en 1850, par le colonel Laussedat, le savant Directeur du Conservatoire des Arts et Métiers. Les principes de la méthode trouvée par M. Laussedat sont d'ailleurs exposés dans deux articles publiés dans le *Mémorial de l'Officier du Génie* (n° 16, 1854; n° 17, 1864).

M. Monet, en donnant ce renseignement, ajoute :

« En France, il eut peu d'imitateurs ; si ce n'est quelques officiers à la

point O *comme point de vue, détermine sur la droite* inaccessible Δ', *des points* A', B', C',... *donnant lieu aux égalités*

$A'B' = B'C' = \ldots = l,$

l *désignant une longueur donnée.*

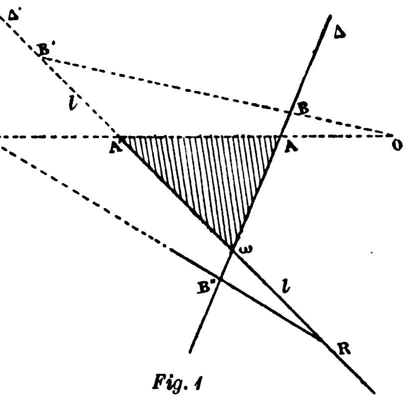


Fig. 1

Prenons sur Δ une origine arbitraire A; soit A' la perspective de A sur Δ'. Si nous déterminons sur Δ un point B tel que, après avoir fait sa perspective B', A'B' soit égal à une longueur donnée l, ce problème une fois résolu, on trouvera, sur Δ, un point C tel que $BC = l$, etc...

---

tête desquels il convient de citer les commandants Javary, Mœssard et Legros; ce dernier comme auteur d'un Sommaire de photogrammétrie (*)... Mais si, en France, la photogrammétrie fut délaissée, il n'en fut pas de même ailleurs. Des savants allemands, s'inspirant des travaux du colonel Laussedat, perfectionnèrent cette science, en firent un corps de doctrine qui passa rapidement dans l'enseignement. C'est ainsi que le Dr Meydenbauer créa un institut spécial de photogrammétrie, placé sous la direction du ministère de l'instruction publique et destiné à former des ingénieurs photographes... Aussi est-il étonnant que cette science, née en France, accessible à tout le monde, soit ainsi délaissée ! »

M. Monet a bien tort de s'étonner ainsi. N'en fut-il toujours de même pour les découvertes françaises? Qu'il s'agisse de faits scientifiques de l'ordre théorique ou d'inventions visant le domaine pratique, il est presque sans exemple que ces découvertes aient reçu tout d'abord, dans le pays où elles ont été conçues, dans notre France, l'accueil auquel elles semblaient avoir droit. Il y a, il faut le croire, dans le caractère français, comme un fond de méfiance pour les nouveautés; et M. de Jonquières, dans les préfaces de ses *Mélanges de Géométrie pure* a pu dire avec raison, faisant allusion à la Géométrie qu'il a tant aimée et si bien servie « J'éprouve une impression pénible en prévoyant que ces belles idées nous reviendront un jour d'Angleterre, de Belgique, d'Italie ou d'Allemagne, après avoir reçu sur le sol étranger une consécration que nous n'aurons pas su ou voulu leur donner nous-mêmes. » Mais que M. Monet se rassure si l'Allemagne et quelques autres pays ont adopté la photogrammétrie; cette science qui lui a fourni l'occasion d'écrire sa très intéressante brochure, en repassant nos frontières, sera, après cette excursion et selon toute vraisemblance, bien accueillie chez nous.

(*) Société d'éditions scientifiques, Paris, 1891.

Prenons, sur AA′, l'isotomique de O. Ce point O′ (principe des transversales réciproques) sera en ligne droite avec les points R′, R isotomiques des points B′, B sur les côtés ωA′, ωA. Par conséquent, si l'on prend ωR = l, RO′ rencon-

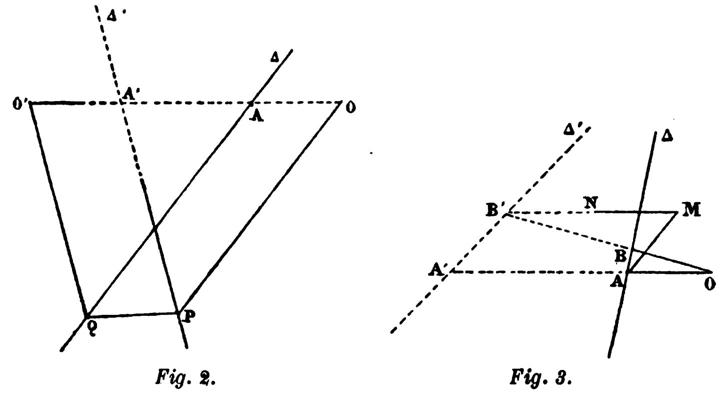


Fig. 2. *Fig. 3.*

tre Δ en R′; l'isotomique de R′, le point B′, est le point qu'il faut viser, du point O, pour obtenir, sur Δ, le segment AB de longueur l.

Cette solution convient au cas où l'on peut déterminer le point O′ et où la partie de Δ′, voisine du point ω, est accessible (**).

Il y a lieu seulement de rechercher comment cette solution doit être modifiée, lorsque ces conditions ne sont pas remplies.

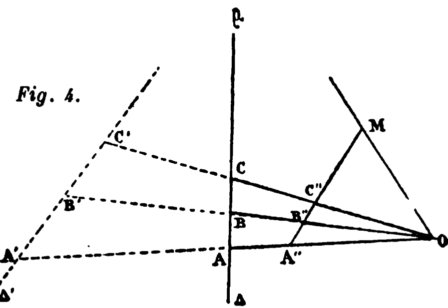
Si, comme le représente la *figure 2*, on ne peut pas jalonner OO′, on détermine le point O′ en traçant OP parallèle à Δ *(fig. 2)*, PQ parallèle à OA, QO′ parallèle à Δ′. Après avoir tracé QO′, le point O′ se trouve déterminé, sur cette droite, en prenant sur QO′ le point qui est en ligne droite avec les points O, A.

Supposons enfin que Δ′ soit une droite complètement inaccessible.

Première solution. — Par A (*fig. 4*) on trace une parallèle

(**) Dans les figures qui accompagnent cette note, les parties accessibles sont représentées par un trait plein; les autres, par un trait ponctué.

à Δ' (*Géométrie de la règle et de l'équerre*, chapitre VI) et l'on prend $AM = l$; par M, on trace MN parallèle à OA. Il reste (*fig.3*) à mener, par O, une droite allant passer par le point où Δ' est coupé par MN. Pour ce dernier problème, nous renvoyons à l'ouvrage cité p. 273.



Seconde solution. — On sait (*loc. cit.*) tracer, par O, une droite passant au point de concours μ, des droites Δ, Δ', et calculer la longueur $O\mu$. Prenons, sur $O\mu$, un point arbitraire M; et, sur MA'', droite parallèle à Δ', une longueur $A''B''$ telle que

$$A''B'' = l\,\frac{OM}{O\mu}.$$

La droite OB'' coupe Δ' en un point B' tel que $A'B' = l$. En prenant ensuite $B''C'' = A'B'$, etc..., les droites OA'', OB', OC',... partagent Δ' en parties égales, chacune d'elles ayant la longueur l. *G. L.*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 134).

272. — *Le triangle pédal d'un point et le triangle pédal du point réciproque sont inscriptibles à une même conique.*

Soient α_0, β_0, γ_0, les coordonnées barycentriques du point considéré, l'équation de la conique est :

$$\alpha_0\beta_0\gamma_0\sum\alpha^2 - \sum\alpha_0(\beta_0^2 + \gamma_0^2)\,\beta\gamma = 0.$$

La transformation homographique instantanée, de M. de Longchamps, montre que : le triangle pédal d'un point et le triangle pédal de son inverse sont également inscriptibles dans une même conique dont l'équation est (en coordonnées normales) :

$$x_0y_0z_0\sum x^2 - \sum x_0(y_0^2 + z_0^2)yz = 0.$$

273. — *Soient* M, *un point quelconque*, $A_1B_1C_1$, *son triangle podaire. On projette* B_1 *et* C_1 *en* B_2 *et* C_2 *sur* BC. *Soient* A' *le milieu de* B_2C_2, B', C', *des points analogues. Les perpendiculaires aux côtés du triangle de référence, menées par* A', B, C', *se coupent en un même point* P.

Il suffit de calculer les segments BA', CA', etc. et de vérifier que la somme des carrés de trois segments non consécutifs est égale à la somme des carrés des trois autres.

x, y, z étant les coordonnées normales de M, on trouve pour celles de P:

$$X : Y : Z = x + y \cos C + z \cos B :...$$

On peut remarquer que P est le complémentaire de M, dans le triangle $A_1B_1C_1$.

274. — *On considère un triangle*, M, *un point de son plan*, $A_1B_1C_1$, *le triangle podaire de* M. *On fait tourner le faisceau* MA_1, MB_1, MC_1, *autour de* M, *d'un angle quelconque* φ, *et l'on considère le triangle* $A_2B_2C_2$ *dont les sommets sont l'intersection des droites du faisceau avec les côtés du triangle. Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées, de* M, *sur les côtés de* $A_2B_2C_2$, *est formé par les côtés du triangle podaire de* M.

Des considérations de géométrie élémentaire permettent d'établir cette proposition.

275. — *On considère un triangle* ABC, M, $A_1B_1C_1$, *un point et son triangle podaire. Les enveloppes des côtés des triangles inscrits à* ABC *et semblables à* $A_1B_1C_1$, *sont trois paraboles qui ont pour foyer commun* M *et pour tangentes au sommet les côtés du triangle podaire de* M. *Ces paraboles sont respectivement tangentes à deux des côtés du triangle de référence.*

Ceci résulte immédiatement de la proposition précédente, n° 274.

Application. — Les enveloppes des côtés des triangles équilatéraux inscrits à un triangle donné sont trois paraboles; elles ont pour foyer commun le premier (ou le second) centre isodynamique, et respectivement pour tangentes aux sommets les côtés du premier (ou du second triangle équilatéral podaire.

Les directrices de ces paraboles forment un triangle équilatéral homothétique au premier (ou au second) triangle équilatéral podaire; le centre d'homothétie étant le premier (ou le second) centre isodynamique. Le triangle équilatéral de ces directrices a pour centre le premier (ou le second) centre isogone.

276. — *On considère un triangle* ABC, *un point* M *de son plan* $A_1B_1C_1$, *le triangle podaire de* M. *On porte, sur les côtés*

de ABC, *les longueurs* $A_1A_2 = A_1A_3$, $B_1B_2 = B_1B_3$, $C_1C_2 = C_1C_3$, *respectivement proportionnelles à* MA_1, MB_1, MC_1. *Les triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, *ont le même centre de gravité, centre de gravité des masses* $\frac{a^2}{\alpha}$, $\frac{b^2}{\beta}$, $\frac{c^2}{\gamma}$, *placées indifféremment en* A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3.

(α, β, γ) désignent les coordonnées barycentriques de M, dans le triangle ABC.

Il suffit d'appliquer le théorème des moments.

277. — *Les conditions étant celles de l'énoncé précédent; le lieu géométrique du centre de gravité de masses quelconques* α, β, γ, *placées en* A_2, B_2, C_2, *est une ligne droite.*

Il en résulte que tous les points remarquables du triangle $A_1B_1C_1$, ont pour lieux géométriques des lignes droites.

BIBLIOGRAPHIE

Mathématiques et Mathématiciens, *Pensées et Curiosités* recueillies par A. Rebière. — (Deuxième édition, revue et augmentée, librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles).

Notre Camarade Rebière nous trouvera peut-être bien sévère dans l'analyse que nous voulons faire ici de cette nouvelle édition d'un des livres les plus curieux qui aient paru dans ces dernières années, si nous lui disons tout d'abord que, malgré tous les perfectionnements apportés par lui à son ouvrage, il doit considérer l'œuvre actuelle comme représentant seulement une base et comme un ensemble de documents destinés à composer le livre qu'il a dû rêver et que, dans tous les cas, nous rêvons pour lui.

L'ouvrage qu'il avait écrit il y a quelques années, celui, si considérablement augmenté, qu'il nous offre aujourd'hui, représentent des tentatives, pleines d'intérêt, mais incomplètes, dans le genre qu'il a eu l'excellente idée d'imaginer. Il n'a pas eu tort de prévoir qu'un livre humoristique sur les choses et les gens qui touchent à la Mathématique serait, pour les plus graves d'entre nous, à certaines heures, un compagnon qu'on irait prendre avec plaisir sur le rayon de sa bibliothèque pour délasser une corde qui ne peut que gagner à se détendre par occasion. A ce livre, auquel pense, nous l'espérons, M. Rebière, il faut un plan et des matériaux Ces matériaux sont déjà réunis, en grande partie, dans le présent volume. Il suffira de les compléter et, aussi, d'éliminer ceux qui, après réflexion, paraîtront d'un intérêt trop minime; le plan est plus difficile à trouver.

Quoi qu'il en soit, le livre de M. Rebière, tel qu'il existe aujourd'hui, est d'une lecture très attachante. Il renferme une série d'anecdotes et de citations intéressantes; il est même instructif en bien des points. — J'espère que l'auteur nous donnera bientôt le plaisir d'analyser la troisième édition; elle répondra sans doute à quelques-uns des desiderata que

nous nous sommes permis de formuler ici et elle nous apportera, avec des perfectionnements qui, il n'est que juste de le reconnaître, ne peuvent être obtenus, dans un ouvrage de ce genre qu'avec l'aide du temps, un livre parfait dans son genre (*).

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES
(NOVEMBRE 1892)

Académie d'Alger.

I. Étant donnée une droite $AB = a$, trouver sur cette droite un point C tel, qu'en construisant sur AC un triangle équilatéral, sur CB un carré, et traçant DE, on ait un pentagone irrégulier ADEFB de surface minimum.

II. Indiquer les caractères auxquels on reconnaît qu'une fraction ordinaire donne lieu à une fraction périodique, simple ou mixte.

Académie de Besançon.

1. — 1° On donne les côtés $a = BC$, $b = AC$ du triangle rectangle en C et le rapport m, soit des surfaces, soit des volumes coniques engendrés par les segments BM, AM de l'hypoténuse, en tournant respectivement autour des côtés adjacents BC, AC. On demande la position du point M.

2° Définir le temps solaire vrai et le temps solaire moyen.

2. — Une droite AB détermine sur deux droites rectangulaires deux segments a et b. Calculer la distance CD à la droite AB du point C situé sur OA à une distance $OC = c$.

Application: $a = 3,52$; $b = 2,27$; $c = 4,13$.

Déterminer C de façon que la surface du quadrilatère OBCD soit égale à 2 OAB.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

Questions à choisir : I. Distance d'un point à une droite.

II. Mener, par un point, un plan perpendiculaire à une droite.

III. Perpendiculaire *commune* à deux droites, l'une dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical.

Académie de Bordeaux.

I. — Aux sommets d'un hexagone régulier ABCDEF sont appliquées des masses respectivement égales à 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Montrer que le centre de gravité du système formé par ces masses se trouve sur la droite BE Déterminer la position du centre de gravité sur cette droite.

II. — Trouver les valeurs de x qui satisfont à l'équation :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 5x = 0.$$

(*) En Angleterre, M. W. Rouse Ball, sous le titre *Mathematical recreations and problems of fast and present times*, a publié un livre qui, par certaines parties, se rattache à l'ouvrage de M. Rebière, et, par d'autres, plus encore, aux *Récréations mathématiques* de Ed. Lucas.

I. *Problème obligatoire.* — Soit ABC un triangle dont on connaît les différents éléments, côtés et angles. Sur AC comme diamètre, on construit une circonférence qui rencontre en D le côté AB et en E le côté BC. On trace DE ; cette droite rencontre en un point M le côté AC. Déterminer la position du point M sur ce côté AC en fonction des éléments du triangle donné.

II. *Choisir entre les questions suivantes :* 1° Variation du quotient

$$\frac{x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1};$$

représentation graphique ; 2° Progressions géométriques (cas où la progression est illimitée) ; 3° Annuités.

Académie de Caen.

1. — 1° Évaluer la somme des carrés des n premiers nombres entiers en s'appuyant sur la formule $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; effectuer ensuite la sommation des n termes $1.2 + 2.3 + 3.4 \ldots\ldots + n(n+1)$.

2° Prouver que la différence entre les carrés de deux nombres impairs est un multiple de 8.

2. — 1° Connaissant le volume, la hauteur et l'une des bases d'un tronc de cône, calculer le rayon de l'autre base ; dire à quelles conditions ce problème est possible ; interpréter les solutions négatives.

2° Calculer $\sin a$ connaissant $\operatorname{tg} 2a$. Discuter le résultat obtenu.

EXAMENS DE SAINT-CYR

Solution de la composition donnée au concours de 1893, par M. Harivel, professeur de mathématiques.

Problème I. — *On connaît dans un triangle le côté* a, *l'angle* A *et le produit* b(b + c) = K², *calculer* b *et* c. *Discussion. Construire, sans calcul, le triangle.*

On a, entre les inconnues b, c, les deux équations

(1) $$b(b+c) = K^2,$$

(2) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

On en déduit

$$a^2 = b^2 + \frac{(K^2 - b^2)^2}{b^2} - 2(K^2 - b^2)\cos A,$$

ou $$2(1 + \cos A)b^4 - (2K^2 + 2K^2 \cos A + a^2)b^2 + K^4 = 0,$$

ou $$4\cos^2\frac{A}{2}\, b^4 - \left(4K^2\cos^2\frac{A}{2} + a^2\right)b^2 + K^4 = 0.$$

Condition de réalité :

$$\left(4K^2\cos^2\frac{A}{2} + a^2\right)^2 - 16K^4\cos^2\frac{A}{2} \geqslant 0,$$

$$\left(4K^2\cos^2\frac{A}{2} + 4K^2\cos\frac{A}{2} + a^2\right)\left(4K^2\cos^2\frac{A}{2} - 4K^2\cos\frac{A}{2} + a^2\right) \geqslant 0.$$

Le premier facteur étant toujours positif, la condition se réduit à

$$4K^2\cos^2\frac{A}{2} - 4K^2\cos\frac{A}{2} + a^2) \geqslant 0,$$

d'où
$$a^2 \geqslant 4K^2 \cos\frac{A}{2}\left(1 - \cos\frac{A}{2}\right),$$
ou, enfin,
$$a^2 \geqslant 8K^2 \cos\frac{A}{2} \sin^2\frac{A}{4}.$$

Si cette condition est vérifiée, l'équation obtenue en posant $b^2 = z$ a ses racines réelles et positives, car la somme et le produit sont positifs.

L'équation (1) nous donne la relation $c = \frac{K^2 - b^2}{b}$, donc b^2 doit être plus petit que K^2, et par suite une racine de l'équation
$$f(z) = 4\cos^2\frac{A}{2} z^2 - \left(4K^2\cos^2\frac{A}{2} + a^2\right)z + K^4 = 0,$$
ne peut convenir que si elle est plus petite que K^2. Or
$$f(K^2) = K^2(K^2 - a^2).$$

1° $K^2 < a^2$, K^2 est intérieur aux racines ; donc une solution.

2° $K^2 > a^2$, K^2 est extérieur aux racines ; alors, comparons K^2 à la demi-somme. Si l'on a $K^2 > \dfrac{4K^2\cos^2\frac{A}{2} + a^2}{8\cos^2\frac{A}{2}}$, c'est-à-dire $K^2 > \dfrac{a^2}{4\cos^2\frac{A}{2}}$ il y a *deux solutions :* il est à remarquer que cela aura lieu si $4\cos^2\frac{A}{2} > 1$, c'est-à-dire si $\frac{A}{2}$ est $< 60°$ ou $A < 120°$.

Si $K^2 < \dfrac{a^2}{4\cos^2\frac{A}{2}}$, c'est-à-dire si $A > 120°$, *aucune solution.*

Construction géométrique (*). — Soit $BC = a$ le côté donné, décrivons sur BC un segment capable de A ; soit BAC le triangle cherché. Prenons $AM = AC$; alors $BM = b + c$; or le lieu des points M tels que $BA \times BM = K^2 = b(b + c)$ est une droite MX perpendiculaire sur le diamètre BO ; c'est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la circonférence O.

D'autre part, dans le triangle isoscèle AMC, on a $AMC = \frac{A}{2}$; le point M est donc à l'intersection de la droite MX et de l'arc capable de l'angle $\frac{A}{2}$, construit sur BC. Suivant les cas, on aura deux solutions, ou une seule, ou des solutions imaginaires. Connaissant M, le triangle ABC est déterminé. En discutant cette solution géométrique (**), on retrouvera les résultats fournis par la discussion faite plus haut.

Problème II. — *On donne un triangle* ABC, *et dans l'espace, une droite indéfinie* X'AX, *passant par* A *et faisant avec* AB *et* AC *les angles* β, γ. *Un point* M *se meut sur la droite* X'AX. *Étudier les variations du rapport* $\frac{MB}{MC}$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Cette discussion était faite avec beaucoup d'élégance et de netteté dans la solution que nous a donnée M. Harivel et dans celle que nous a envoyée M. l'abbé Reboul, professeur au collège de Bellay. Nous l'avons supprimée pour ne pas étendre davantage cette rédaction ; le lecteur la rétablira d'ailleurs facilement. G. L.

Montrer que les positions remarquables du point M *sont celles pour lesquelles la droite* X'X *coupe la sphère ayant son centre sur cette droite et passant par* B *et* C.

Solution. — Posons $AM = x$, $AB = c$, $AC = b$. Nous avons

$$\overline{MB}^2 = x^2 + c^2 - 2cx \cos \beta,$$
$$\overline{MC}^2 = x^2 + b^2 - 2bx \cos \gamma$$

et, par conséquent

$$\frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}^2} = y = \frac{x^2 + c^2 - 2\,cx \cos \beta}{x^2 + b^2 - 2bx \cos \gamma}.$$

Pour étudier la variation de $\frac{MB}{MC}$, c'est-à-dire celle de y, on peut prendre la dérivée y'. On obtient ainsi une équation du second degré en x, dont les racines, toujours réelles, se séparent facilement. Mais il est inutile d'avoir recours à ce calcul (*), si l'on observe que le problème donné revient au suivant : *Étudier la variation d'une fraction du second degré*. Dans le cas présent, le dénominateur, égalé à zéro, a ses racines imaginaires; la discussion est des plus simples. On la trouve exposée dans tous les traités d'algèbre et on peut la résumer par la figuration d'une courbe qui, dans le cas présent, a la forme serpentine.

Au lieu d'indiquer ce tracé trop connu, nous préférons faire observer que la discussion du problème en question peut être encore écourtée par les considérations suivantes.

Observons que le point A ne joue aucun rôle particulier dans le problème; pour étudier la variation du rapport $\frac{MB}{MC}$, on peut substituer, à ce point, un autre point quelconque.

Prenons donc sur X'X un point O, intersection avec X'X du plan mené par le milieu de BC, perpendiculairement à cette droite. Posons :

$$OB = OC = h, \qquad OM = x, \qquad MOB = \beta', \qquad MOC = \gamma'.$$

Nous avons à étudier la variation de

$$y = \frac{x^2 + h^2 - 2hx \cos \beta'}{x^2 + h^2 - 2hx \cos \gamma'}.$$

L'équation

$$(1) \qquad x^2(y - 1) - 2hx(y \cos \gamma' - \cos \beta') + h^2(y - 1) = 0,$$

donne les valeurs limites de y; ce sont les racines de

$$(y \cos \gamma' - \cos \beta')^2 - (y - 1)^2 = 0.$$

Cette équation, dont le premier membre se décompose en deux facteurs du premier degré donne, pour les valeurs limites y', y'',

$$y' = \frac{\sin^2 \frac{\beta'}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma'}{2}}, \qquad y'' = \frac{\cos^2 \frac{\beta'}{2}}{\cos^2 \frac{\gamma'}{2}}.$$

Quant aux valeurs correspondantes de x, l'équation (1) devant avoir ses racines égales pour $y = y'$, et pour $y = y''$, le produit de ces racines étant dans tous les cas égal à h^2, on voit que $x'^2 = h^2$, $x''^2 = h^2$. L'une des racines est h; l'autre est $-h$.

(*) Autant que possible, et bien que la notion des dérivées soit aujourd'hui introduite dans les Cours de Saint-Cyr, on doit éviter l'emploi du calcul des dérivées dans les problèmes élémentaires. *G. L.*

En prenant, à partir de O, sur $X'X$, deux points μ, μ', tels que $O\mu = O\mu' = h$, on a donc les points cherchés; résultat conforme à celui qu'indiquait l'énoncé.

Remarque I. — La relation (1) a été établie en supposant le point M situé sur la semi-droite OX. Si M est pris sur la semi-droite OX, la relation subsiste, car il faut changer *simultanément :* x, en $-x$; β', en $\pi - \beta'$; γ', en $\pi - \gamma'$.

Remarque II. — Si l'on fait tourner le plan CXX' jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan BXX', la discussion précédente conduit à la conclusion suivante :

Étant donnés une circonférence Δ *et un diamètre* μ, μ'; *deux points* B, C *étant pris sur* Δ, *les distances aux points* B, C *d'un point* M *mobile sur la droite indéfinie* μ, μ' *ont un rapport qui passe par un maximum ou par un minimum, quand* M *coïncide avec l'un des points* μ, μ'.

On pouvait ainsi ramener, mais sans grand avantage, la question proposée à une question équivalente de géométrie plane.

QUESTION 457

Solution par M. A. Droz-Farny.

A, B, C *étant les trois sommets d'un triangle équilatéral,* MD *la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque* M *du plan sur le côté* BC, *démontrer que*

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MA}^2 = 3R(2MD - R),$$

R *étant le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC.

Puis, si l'on suppose AB = AC, *démontrer que le lieu du point* M, *tel que la relation précédente ait lieu, est une droite parallèle à* BC.

1° Prenons d'abord le cas du triangle isoscèle. Soit A′ le point milieu de BC; on a

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \frac{a^2}{2} + 2\overline{MA'}^2,$$

Or, on suppose

et, par suite,

$$2\overline{MA}^2 = 2\overline{DA'}^2 + 2(MD - h)^2$$

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MA}^2 = \frac{a^2}{2} - 2h^2 + 4h.MD$$

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MA}^2 = 3R(2MD - R).$$

On a donc $\frac{a^2}{2} - 2h^2 + 4h.MD = 6R.MD - 3R^2.$

Cette égalité prouve que MD est une longueur constante.

2° Dans le cas du triangle équilatéral,

$$h = \frac{3}{2} R, \qquad a = R\sqrt{3},$$

d'où

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MA}^2 = \frac{3R^2}{2} - \frac{9R^2}{2} + 6R.MD = 3R(2MD - R).$$

Nota. — Solutions diverses par MM. E. Foucart, élève au lycée Michelet; B. Sollertinsky, W. Greenstreet, J. Hais, répétiteur au collège d'Étampes; Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

QUESTION 460

Solution par M. E. Lemoine.

Si l'on a a(p − a) + b(p − b) + c(p − c) = 4S, S *désignant l'aire du triangle, les trois circonférences tangentes, décrites de chacun des sommets comme centres, avec* p − a, p − b, p − c *pour rayons, sont tangentes à une même droite.*

La condition $\sum a(p-a) = 4S$ équivaut à celle-ci : $2p = \delta$ ou $\delta = 4R + r = r_a + r_b + r_c$.

(Voir *Association française*, 1890, Congrès de Limoges, p. 139, ou ce Journal, 1892, p. 65.)

Or, la circonférence tangente aux trois circonférences indiquées dans l'énoncé et les ayant toutes trois à son intérieur, a pour centre le point dont les coordonnées normales sont $\frac{r_a - a}{a}, \frac{r_b - b}{b}, \frac{r_c - c}{c}$ (Congrès de Limoges, p. 134.)

Cette circonférence devient une droite si le centre est à l'infini, c'est-à-dire si

$$r_a + r_b + r_c = 2p, \quad \text{ou} \quad 2p = \delta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En appliquant la transformation continue, en A, à la propriété à démontrer, on est conduit immédiatement à ce théorème :

Si ap + b(p − c) + c(p − b) = 4S *(ce qui équivaut à* $2(p-a) = \delta_a$ *ou* $\delta_a = 4R - r_a$*), les trois circonférences décrites de* A, B, C *comme centres, avec* p, p − c, p − b *pour rayons, sont tangents à une même droite.*

QUESTIONS PROPOSÉES

517. — Étant données trois circonférences Δ, de centres respectifs A, B, C; la circonférence qui leur est orthogonale admet pour axe radical avec la circonférence ABC la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère complet formé par les axes de similitude des circonférences Δ.

(A. Poulain.)

518. — Soient A, B, C, D, F, G, les six sommets d'un quadrilatère complet dont les quatre premiers A, B, C, D, sont sur une même circonférence. Soit E le point de concours des diagonales AD et BC.

1° Les circonférences circonscrites aux triangles ABE, CDE, ADG et BCG, coupent la droite GE au même point O_2. De même, les circonférences ABF, CDF, ACG et BDG, coupent GF au même point O_1, et les circonférences ACE, BDE, ADF et BCF coupent FE au même point O_3.

2° La droite GO_2 est bissectrice de l'angle AO_2C.

3° Les droites EO_1, FO_2, GO_3 sont les hauteurs du triangle EFG. Leur point de concours est le centre de la circonférence donnée.

4° Les centres des quatre circonférences décrites au n° 1, et qui passent en O_2, sont sur une même circonférence qui passe aussi en O_2. Même chose pour les deux autres groupes de quatre circonférences.

(Lucien Lévy.)

519. — Si par le point de rencontre de deux circonférences on mène une corde inclinée de 60° sur la ligne des centres, la longueur totale de cette corde interceptée par les deux circonférences est égale à la distance des centres.

(E. N. Barisien.)

ERRATA

1° *J. E.* 1893, p. 134, ligne 4, en remontant, *au lieu de* $\sigma\sigma'$, *lire :* de σ et de σ'.

2° Par suite d'une erreur de mise en pages, la partie comprise entre la 13e ligne de la p. 101 et la 25e ligne de la page suivante, doit être intercalée entre les 3e et 4e lignes de la p. 85.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13992-6-93.

UNE REMARQUE SUR LA MULTIPLICATION (*)

par M. Ed. Collignon.

La multiplication de deux nombres entiers est une opération laborieuse, lorsque les deux facteurs donnés ont chacun un grand nombre de chiffres, et qu'on n'a sous la main ni table de logarithmes, ni table de carrés, ni arithmomètre, ni aucune autre machine à calculer.

La remarque suivante pourra, croyons-nous, simplifier l'opération, ou servir à la vérifier si elle est déjà faite, sans comporter d'autre difficulté que celle de transcrire exactement des nombres et de faire des additions.

Parmi les produits partiels du multiplicande qu'on peut avoir à former, il en est deux que l'on obtient immédiatement et pour ainsi dire sans effort : ce sont les produits par 2 et par 5. Rien n'est plus facile ni plus rapide que de doubler le multiplicande, ou d'en prendre la moitié après l'avoir rendu dix fois plus grand. Si donc le multiplicateur ne comprenait que les chiffres 0, 1, 2, 5, la multiplication se ferait en quelque sorte d'elle-même, et il n'y aurait qu'à additionner des produits partiels, tout de suite connus, pour avoir le produit cherché.

Or il est toujours facile de décomposer un nombre donné N en parties telles, qu'elles contiennent chacune les chiffres indiqués, à l'exclusion de tous les autres. La transformation est fondée sur les relations

$$3 = 2 + 1 = 5 - 2, \quad 4 = 5 - 1, \quad 6 = 5 + 1, \quad 7 = 5 + 2,$$
$$8 = 10 - 2, \quad 9 = 10 - 1,$$

Un exemple montrera la marche à suivre. Prenons au hasard un nombre, 7 289 795. On substituera à 7 la somme 5 + 2, à 8 la différence 10 − 2, etc. Les résultats pourront s'inscrire sur des lignes horizontales distinctes, en ayant bien soin de séparer nettement les parties qui s'ajoutent et celles qui se retranchent. On forme le tableau suivant :

(*) Note extraite de la chronique des *Annales des Ponts et Chaussées.*

N =	7	2	8	9	7	9	5
	5	2	0	0	5	0	5
+	2	1	1	0	2	0	0
					+ 1	0	0
			− 2	1	0	1	0

Le nombre donné est ramené, par une première décomposition, à la somme de quatre parties distinctes, dont une négative :

$$N = 5\,200\,505 + 2\,110\,200 + 100 - 21\,010;$$

mais on peut réduire ces quatre termes à trois, en observant que la réunion des centaines positives donne pour total 8, c'est-à-dire 10 — 2 centaines; puis que l'unité du quatrième ordre, introduite par cette transformation dans la partie positive, détruit l'unité négative dans la partie à retrancher. Enfin, on peut retrancher une unité du cinquième ordre aux deux termes de la différence. Il vient en résumé :

$$N = 5\,200\,005 + 2\,100\,000 - 10\,210,$$

comme on peut le vérifier.

Proposons-nous de multiplier par ce nombre N un nombre quelconque P = 2 734 892. Formons à part les produits de P par 2 et par 5, ce qui donne :

$$P \times 2 = 5\,469\,784,$$
$$P \times 5 = 13\,674\,460.$$

Ce travail fait, on peut dire que la multiplication proprement dite est achevée; il n'y a plus qu'à poser correctement les nombres et à faire les sommes. Les opérations pourront être disposées comme il suit :

Premier produit.

Multipl. par 5 200 005

13 674 460
546 978 4
13 674 460

14.221.452.074.460

Deuxième produit.

Multipl. par 2 100 000

273 489 200 000
5 469 784

5.743.273.200.000

Troisième produit.

Multipl. par 10 210

27 348 920
546 978 4
27 348 920

27.923.247.320

Opération finale.

14 221 452 074 460
\+ 5 743 273 200 000

19 964 725 274 460
− 27 923 247 320

19.036.802.027.140

Produit cherché.

Les seules opérations un peu pénibles qui restent à faire dans cette méthode sont les additions des produits partiels, pour chacune des multiplications indiquées. Cette difficulté subsiste dans l'opération usuelle, augmentée de la difficulté provenant de la multiplication proprement dite et de l'addition des retenues. Une évaluation sommaire permet d'évaluer au tiers au plus la difficulté de l'exemple précédent, traité par la méthode nouvelle, comparée à celle qu'on éprouverait à faire la multiplication directe du nombre P par le nombre N.

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$

ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. **A. Aubry.**

(*Suite*, voir page 153).

25. — Considérons particulièrement le cas de la racine carrée. Il est aisé, dans ce cas, de trouver une série de radicaux donnant une première approximation de plus en plus exacte.

Soit $a^2x = b^2 \pm c$; formons la suite A, A', B, B', C, C'..., telle que pour quatre termes consécutifs H, H', I, I' on ait

$$I = bH + aH', \qquad I' = axH + bH',$$

les deux premiers étant $A = a$, $A' = b$. On aura en général

$$xG^2 = G'^2 \pm c, \quad xH^2 = H'^2 \pm c, \quad xI^2 = I'^2 \pm c, \ldots$$

On voit en effet, en remplaçant I et I' par leurs valeurs en H et H', que

$$x \quad - I'^2 = xH^2 - H'^2,$$

et que, par suite :

$$xI^2 - I' = xH^2 - H'^2 = xG^2 - G'^2 = \ldots = xA^2 - A'^2 = \pm C.$$

On tire de là

$$\sqrt{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 \pm \frac{c}{b^2}} = \frac{B'}{B}\sqrt{1 \pm \frac{C}{B'^2}} = \frac{C'}{C}\sqrt{1 \pm \frac{C}{C'^2}} = \ldots$$

$$= \frac{H'}{H}\sqrt{1 \pm \frac{C}{H'^2}} = \frac{I'}{I}\sqrt{1 \pm} = \ldots$$

Comme les termes A, A' B, B', ... grandissent de plus en

plus, les quantités sous radicaux deviennent de plus en plus voisines de l'unité.

Par exemple, soit à trouver $\sqrt{10}$, on a

$$\sqrt{10} = \frac{19}{6}\sqrt{1 - \frac{1}{361}}$$

d'où $A = 6$, $A' = 19$, Il vient ainsi

$B = 6.19 + 19.6 = 228$, $B' = 60.6 + 19.19 = 721$
$C = 19.228 + 6.721 = 8658$, $C' = 60.228 + 19.721 = 27379$
$D = 19.8658 + 6.27379 = 328776$, $D' = 60.8658 + 19.27379$.

. . . .

26. — Comme, d'un autre côté, la valeur des radicaux tend de plus en plus vers l'unité, il s'ensuit que les rapports $\frac{A'}{A}, \frac{B'}{B}, \frac{C'}{C}, \ldots$ tendent vers la valeur $\sqrt{x}$. Ainsi, dans l'exemple précédent, on a pour approximations successives de $\sqrt{10}$:

$$\frac{19}{6}, \frac{721}{228}, \frac{27379}{8658}, \frac{1039681}{328776}, \ldots$$

On peut tirer, de cette remarque, le moyen de développer la racine carrée en série illimitée. On a en effet, en remplaçant I et I′ par leurs valeurs,

$$\frac{I'}{I} - \frac{H'}{H} = \pm \frac{ac}{IH},$$

d'où

(11) $$\sqrt{x} = \frac{A'}{A} + \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) + \left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B}\right) + \ldots = \frac{b}{a} \pm ac\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \ldots\right)$$

Les termes A, B, C, ... peuvent se trouver directement, sans calculer A′, B′, C′, ... En effet, on a

$$G' = \frac{H - bG}{a} = \frac{H' - axG}{b},$$

d'où $$H' = \frac{bH + a^2xG - b^2G}{a};$$

et en remplaçant H′ dans l'expression de I,

(12) $$I = 2bH + G(xa^2 - b^2) = 2bH \pm cG.$$

Chaque terme de la suite A, B, C, ... se calcule donc au moyen des deux précédents.

27. — La méthode à laquelle nous sommes parvenu au numéro précédent a quelque analogie avec plusieurs autres

peu connues, et qui peuvent être exposées par les théorèmes suivants, que nous laissons à démontrer :

Soit une série ainsi définie :

$$A=\frac{b}{2a}, A'=a+A, B=\frac{A^2}{2A'}, B'=A'-B, C=\frac{B^2}{2B'}, C'=B'-C, \ldots$$

a *et* b *positifs : les termes* A', B', C',... *tendent vers la limite* $\sqrt{a+b}$. *Il en est de même des termes* A', B', C', ... *de la série*

$$A=\frac{b}{2a+1}, \quad A'=a+A, \quad A''=A(A-1);$$
$$B=\frac{A''}{2A'+1}, \quad B'=A'-B, \quad B''=B(B+1);$$
$$C=\frac{B''}{2B'+1}, \quad C'=B'-C, \quad C''=C(C+1); \ldots$$

(Cataldi, *Modo brevissimo per trovare la radice quadra*, Bologne, 1613.)

Les termes de la série $A=\frac{b}{2a}, B=\frac{b}{A+2a}, C=\frac{b}{B+2a}$, $D=\frac{b}{C+2a}$, ... *oscillent autour de la limite* $\sqrt{a^2+b}+a$.

(Rolle, *Mém. de l'Acad. des Sc.*, 1692.)

Formons la suite

$A=a, \quad A'=b; \quad B=aA, \quad B'=bA'+A; \quad C=aB, \quad C'=bB'+B; \ldots$

les rapports $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, *tendent vers la limite* $\frac{-b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.

(Jean Bernoulli, *Lectiones Mathematicæ.*)

a *et* b *étant positifs, considérons la série*

$A=1, B=a, C=aB+bA, D=aC+bB, D=aD+bC, \ldots;$

la somme de la série

$$\frac{b}{AB}-\frac{b^2}{BC}+\frac{b^3}{CD}-\ldots$$

tend vers la limite $\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ (*id. id.*) (*).

(*) Par exemple

$$\sqrt{5}=2\left(1+\frac{1}{1.1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.8}+\ldots\right), \quad \sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.5}+\ldots$$

La série peut ainsi s'écrire

$$\frac{ab}{AC}+\frac{ab^3}{CE}+\frac{ab^5}{EF}+\ldots$$

Les nombres A, A′, a, *étant quelconques, si l'on a*
$B = aA + xA'$, $B' = A + aA'$; $C = aB + xB'$, $C' = B + aB'$;..
les rapports $\frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \ldots$ *tendent vers la limite* $\sqrt{x}$. (Prouhet, *Nouv. Ann.)*, Etc. *(A suivre.)*

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

RELATIVES AUX PROJECTIONS DES SOMMETS D'UN TRIANGLE SUR LES BISSECTRICES

Par MM. **J. Clairin** et **H. Verrière**, élèves au lycée Louis-le-Grand.

I. — *Soient un triangle* ABC, O *le centre du cercle inscrit,* α, β, γ *les points de tangence,* M, M′, M″ *les milieux des côtés. La projection* P′ *du sommet* B *sur la bissectrice de l'angle* C *est à l'intersection de* $\gamma\beta$ *et de* MM″.

En effet, l'égalité des angles P′βC et P′αC, et celle des angles BOC, P′βC (1) entraînent l'égalité des angles P′αC et BOC (2) et celle des angles OP′α et OBC. Donc le quadrilatère P′OαB est inscriptible, et l'angle OαB étant droit, l'angle OP′B doit l'être aussi.

En prolongeant BP′, on voit facilement que P′ est au milieu du segment compris entre B et AC, et par suite sur MM″ (*).

On voit de même que, si de deux sommets, on abaisse des

---

ou se remplacer par le produit

$$\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{AC}\right)\left(1+\frac{b^2}{BD}\right)\left(1-\frac{b^3}{CE}\right)\cdots$$

On a aussi la relation

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{AC}+\frac{b}{BD}+\frac{b^2}{CE}+\cdots$$

(*) On a en effet :

$$BOC = 180° - \frac{B+C}{2} = 980° - \left(90° - \frac{A}{2}\right) = 90° + \frac{A}{2}$$

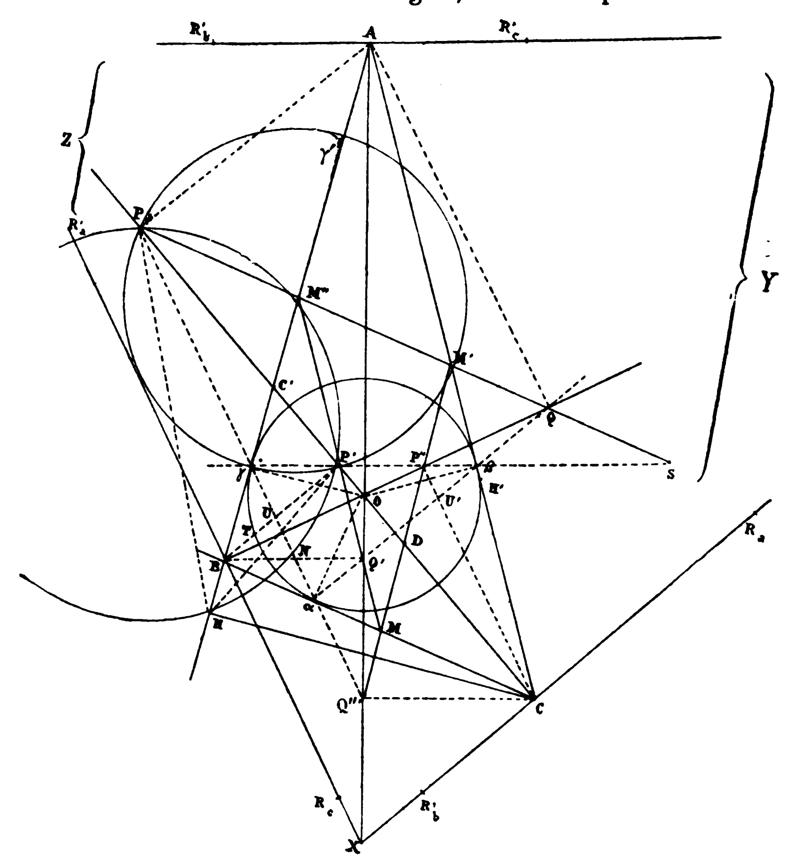
et

$$\widehat{P'\beta C} = 180° - \left(90° - \frac{A}{2}\right) = 90° + \frac{A}{2}.$$

Donc

$$BOC = \widehat{P'\beta C}.$$

perpendiculaires sur les bissectrices issues de ces mêmes sommets, on a deux points sur une corde de tangence; et que, si d'un sommet on abaisse des perpendiculaires sur les bissectrices des deux autres angles, on a deux points situés



sur la droite qui joint les milieux des côtés adjacents au premier sommet.

II. — *Les points* P, P′, γ *sont sur une circonférence orthogonale à* O, *dont le centre est* M″.

En effet, MP′ est parallèle à la droite AC; M″P, à BC,

La similitude des triangles M″γP′ et Aγβ, M″γP et γBα

montre que :

$$M''P' = M'\gamma = M'P.$$

D'autre part, ce cercle est orthogonal à O, puisqu'il a son centre sur une tangente à O. On démontrerait de même, pour les autres côtés, que M' et M sont les centres des cercles $P''\beta Q$, $Q'\alpha Q''$.

III. — *Les axes radicaux des trois cercles* M, M', M'' *sont* $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$.

En effet, ces trois cercles étant orthogonaux au cercle inscrit, O est leur centre radical, et les droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, perpendiculaires à BC, AC, AB, le sont aussi aux droites M'M'', MM'', MM' qui joignent les centres deux à deux.

Le cercle O est un cercle d'Apollonius des triangles $P\gamma P'$, $P''\beta Q$, $Q'\alpha Q''$.

La droite PT est tangente à O.

En effet, l'on a d'après II

$$\overline{OT}^2 = \overline{O\alpha}^2 = OP'.OP\,;$$

et comme TP' est perpendiculaire à OP, l'on en déduit que l'angle OTP est droit.

IV. *Le quadrilatère* PP'P''Q *est inscriptible, et les triangles* P'P''Q', PQQ'' *sont métaharmoniques par rapport à* O.

En effet, la proposition précédente nous donne :

$$\overline{O\alpha}^2 = OP.OP' = OP''.OQ,$$

ce qui démontre la première partie du théorème. On verrait de même que :

$$OP.OP' = OQ.OP'' = OQ'.OQ''.$$

Les triangles P'P''Q', PQQ'' sont donc métaharmoniques par rapport à O.

V. *On sait que,* H *étant le pied de la hauteur, le quadrilatère* HPM''P' *est inscriptible et que le centre du cercle circonscrit au quadrilatère est sur la circonférence des neuf points.*

VI. *La parallèle à la bissectrice issue de* A, *menée par* P', *rencontre* AB *au point* γ' *qui est le point de contact du cercle exinscrit dans l'angle* C *et de* AB, *et le centre du cercle exinscrit au triangle* P'HP *tandis que* γ *est le centre du cercle inscrit au même triangle.*

En effet, la parallèle à AO, menée par P', est perpendiculaire à $\gamma\beta$; donc le point γ', où elle rencontre AB, est l'extrémité du diamètre $\gamma M''$ du cercle $P\gamma P'$. γ' est d'ailleurs tel que :

$$\gamma' M'' = \gamma M''.$$

Donc γ' est le point de contact du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{C}$.

Comme il est aisé de le voir, γ et γ' sont les centres des cercles inscrit et exinscrit à PP'H. On observe que HM'' est la bissectrice de $\widehat{PHP'}$, et que $P'\gamma$ est celle de $\widehat{P'}$, puisque l'on a :

$$PP'\gamma = \frac{\widehat{B}}{2}. \quad BP'\gamma = 90^\circ - \frac{B}{2}. \quad BP'H = BCH = B - 90^\circ;$$

d'où

$$\gamma P'H = 90^\circ - \frac{B}{2} + B - 90^\circ = \frac{B}{2}.$$

VII. *Les perpendiculaires élevées à* $\gamma P'$, γP, *par leurs milieux, coupent respectivement* $P\gamma$, $P'\gamma$ *en deux points situés sur la circonférence* M''PHP'.

Soit en effet N le point où la perpendiculaire au milieu de $\gamma P'$ rencontre γP. On a :

$$\widehat{PNP'} = 180^\circ - \widehat{2N\gamma P'} = 180^\circ - 2\left(90^\circ - \frac{\widehat{PHP'}}{2}\right) = \widehat{PHP'},$$

VIII. *Le point* D, *d'intersection des droites* MM', CO, *est le centre de similitude des cercles* PC'H, P'C'H. (C' *étant le point où la bissectrice, issue du sommet* C, *rencontre le côté* BC).

On a, en effet, le triangle $\gamma P\gamma'$ étant rectangle et M'' étant le milieu de l'hypoténuse $\gamma\gamma'$:

$$\widehat{M''PC'} = \widehat{M''P\gamma} - \frac{\widehat{HPC'}}{2} = \widehat{P\gamma M''} - \frac{\widehat{HPC'}}{2} = \widehat{PHM''}$$
$$+ \frac{HPC'}{2} - \frac{HPC'}{2} = PHM''.$$

La droite M''P est donc tangente à la circonférence PC'H; et, de même, M''P' est tangente à la circonférence C'P'H.

Par suite, le point M'' étant sur l'axe radical des deux cercles, les points PP' sont antihomologues, et la droite PP' passe par le centre de similitude directe des deux cercles. D'autre part, ce point est aussi sur la perpendiculaire élevée

à HC en son milieu. Il est donc déterminé par l'intersection de ces deux droites, d'où l'on déduit qu'il n'est autre que D.

IX. — *Les trois cercles tels que* HPM″P′ *ont deux à deux, pour axes radicaux, les droites* AO, BO, CO.

En effet, H′ étant la projection de B sur AC, on a la relation

$$AB.AH = 2AM''.AH = AH'.AC = 2AM'.AC,$$

ou

$$AM''.AH = AM'.AH'$$

Le point A est donc sur l'axe radical des cercles HPP′M″, H′M′P″Q; et, comme le point O est le centre radical des trois cercles, le théorème est démontré.

X. — S *est le centre de similitude directe de* M′.M″, *et le centre radical du cercle* O *et des cercles décrits sur* OA *et* BC *comme diamètres.*

Du parallélisme de M″P′ et de AC, de M′P″ et de AB, résulte la première partie du théorème. On en déduit la relation :

$$S\gamma.S\beta = SP'.SP''.$$

Donc le point S est d'égale puissance par rapport à O et au cercle décrit sur BC. Comme, d'autre part, il est sur l'axe radical du cercle O et du cercle décrit sur OA, il est bien le centre radical des trois cercles énoncés.

Conséquence. — *Lorsque deux des points d'intersection des droites telles que* M″M′, *et* $\gamma\beta$ *sont dans l'intérieur du triangle, les trois points d'intersection sont en ligne droite.*

Dans ce cas, deux des points S sont les centres de similitude inverse et, le troisième, un centre de similitude directe, des trois cercles M, M′, M″ pris deux à deux. Si plus ou moins de deux points d'intersection étaient dans l'intérieur du triangle, l'on aurait ou trois centres de similitude inverse, ou deux centres de similitude directe et un de similitude inverse, et le théorème ne serait plus vrai.

L'on déduit encore facilement de ce théorème que les trois points SUU′ sont en ligne droite; P′U étant parallèle à $\alpha\beta$, et P″C à $\gamma\alpha$. (U et U′ sont respectivement les points d'intersection des droites BP′, $\alpha\gamma$; CP″, $\alpha\beta$.)

XI. — *Soient :* $R_aR'_a$, R'_bR_b $R_cR'_c$ *les projections des sommets*

A,B,C *sur les bissectrices extérieures issues des autre sommets* XYZ *le triangle formé par ces bissectrices. Les groupes de points :* $R_aR'_aR_bR'_bR_cR'_c$; $R_bQ''Q'P''QR_a$; $R_cQP''P'PR'_b$; $P'PR'_aQ'Q''R_a$; *sont respectivement sur quatre circonférences dont chacune est concentrique à l'un des cercles touchant les trois côtés du triangle* MM'M", *et orthogonale aux trois autres.*

Cette propriété est connue; en effet, les quatre cercles qui renferment les douze points, six par six, sont respectivement les cercles de Taylor, des triangles XYZ, XOY, YOZ, ZOX. (On peut se reporter, pour la démonstration de la seconde partie de l'énoncé, au *Traité de Géométrie élémentaire récente* de M. J. Casey, p. 22 et 23.)

On sait aussi que les droites XM, YM', ZM" *concourent en un point* K, *centre des symédianes du triangle* ABC', *et point de Gergonne du triangle* MM'M".

On obtient des propriétés analogues aux précédentes, en considérant les bissectrices extérieures du triangle ABC et les cercles exinscrits à ce même triangle.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite,* voir page 159).

278. — *Soient* M, *un point quelconque* (x_1, y_1, z_1) *du plan d'un triangle,* A', B', C', *les points où les perpendiculaires menées par* M *à* MA, MB, MC, *coupent les côtés* BC, CA, AB. *Les points* A', B', C', *sont toujours sur une même ligne droite* (Δ).

L'équation de la perpendiculaire en M, à MA, est :

$$\begin{aligned} &- x[y_1(y_1 + z_1 \cos A) + z_1(y_1 \cos A + z_1)] \\ &+ y[z_1(y_1 \cos B - z_1 \cos C) + x_1(y_1 + z_1 \cos A)] \\ &+ z[y_1(z_1 \cos C - y_1 \cos B) + x_1(z_1 + y_1 \cos A)] = 0. \end{aligned}$$

D'où on déduit aisément les coordonnées de A'; on vérifie ensuite que A', B', C', sont sur la droite représentée par :

$$(\Delta) \qquad \sum \frac{x}{y_1z_1 + x_1(z_1 \cos C + y_1 \cos B - x_1 \cos A)} = 0.$$

Applications. — Si M est I, on a pour (Δ)

$$\sum x \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = 0.$$

Si M est O, (Δ) est, en coordonnées barycentriques

$$\sum \frac{\alpha}{1 - 2 \cos A} = 0.$$

Si M est G, (Δ) est

$$\sum \frac{\alpha}{5a^2 - b^2 - c^2} = 0.$$

279. — *Soit un triangle* ABC, *dont les côtés sont coupés en* A′, B′, C′, *par une même transversale. Démontrer que les cercles, de diamètre* AA′, BB′, CC′, *ont même axe radical.*

Soit
$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$
l'équation de la transversale A′B′C′. Les cercles de diamètre AA′, BB′, ont pour équations :

$$\nu z^2 \cos C - \mu y^2 \cos B + xz(\mu - \nu \cos A)$$
$$+ xy(\mu \cos A - \nu) + yz(\mu \cos C - \nu \cos B) = 0;$$
$$\mu y^2 \cos B - \lambda x^2 \cos A + yz(\lambda - \mu \cos C)$$
$$+ xz(\lambda \cos C - \mu) + xy(\lambda \cos B - \mu \cos A) = 0.$$

L'équation de l'axe radical de ces cercles, est :

$$(\Delta) \quad \lambda(\mu c - \nu b)x \cos A + \mu(\nu a - \lambda c)y \cos B + \nu(\lambda b - \mu a)z \cos C = 0.$$

Sa forme symétrique montre qu'elle appartient également au premier et au troisième cercle.

Ainsi, quand ces cercles sont sécants, ils se coupent aux deux mêmes points.

La droite Δ passe par l'orthocentre H du triangle de référence, elle passe également par le point dont les coordonnées normales sont :

$$\frac{\lambda x}{\operatorname{tg} A} = \frac{\mu y}{\operatorname{tg} B} = \frac{\nu z}{\operatorname{tg} C}.$$

La question posée dans cet exercice est en quelque sorte l'inverse de celle qui est posée à l'exercice précédent, nº 278. Étant donné M, nous avons trouvé Δ. A la droite Δ donnée correspondent deux points M, situés sur l'axe radical trouvé plus haut.

Applications. — Si Δ est la droite de Lemoine l'axe radical commun est la droite d'Euler.

Si Δ est la droite harmoniquement associée à H ou à O, l'axe radical commun est dans les deux cas la droite KH, qui joint le point de Lemoine à l'orthocentre.

280. — *Coordonnées de l'orthocentre du triangle podaire d'un point.*

Soient, x, y, z, les coordonnées normales du point M considéré, on trouve aisément pour l'orthocentre du triangle podaire de M :

$$X : Y : Z = (bz + cy)(x^2 + xz \cos B + xy \cos C - yz \cos A)$$
$$: (cx + az)(y^2 + xy \cos C + yz \cos A - xz \cos B)$$
$$: (bx + ay)(z^2 + xz \cos B + yz \cos A - xy \cos C).$$

Applications. — L'orthocentre du triangle podaire de I est le point Ψ, x : cos B + cos C, : … ; c'est l'intersection de OI et de Γν.

L'orthocentre du triangle podaire de K est en coordonnées barycentriques le point :

$$\alpha : \beta : \gamma = 5a^2 - b^2 - c^2 : 5b^2 - a^2 - c^2 : 5c^2 - a^2 - b^2.$$

Ce point est situé sur GK.

L'orthocentre du triangle orthique est le point :

$$x : y : z = \cos 2A \cos (B - C) : \ldots$$

CORRESPONDANCE

M. Lemoine nous adresse la lettre suivante :

« MON CHER AMI,

» Je vous remercie de la longue et élogieuse notice bibliographique que vous avez consacrée à la *Géométrographie*. Je n'ai qu'à m'en féliciter ; vous me permettrez, j'espère, cependant, de relever un point où vous me prêtez une idée que je n'ai pas. Je ne me suis pas exprimé assez clairement sans doute, surtout, parce que la place qui m'était réservée réglementairement à l'Association française — et qui par décision spéciale très bienveillante, a, du reste, été beaucoup dépassée — ne me permettait pas des développements trop détaillés, sur la philosophie générale de mon essai.

» Je n'assimile point, en réalité, les opérations R_1, R_2, C_1, C_2, C_3; c'est impossible, elles sont évidemment irréductibles; ce sont des unités différentes, et l'on ne peut, même et peut-être surtout, dans le domaine spéculatif, où je me place, songer à apprécier leurs valeurs relatives. Pour moi, une construction (A) ne se résume réellement que par son symbole *complet :*

$$l_1R_1 + l_2R_2 + l_3C_1 + \ldots$$

et hors le cas — très fréquent d'ailleurs — où la construction

(B) $$l'_1R_1 + l'_2R_2 + l'_3C_1 + \ldots$$

n'est pas telle que l'_1, l'_2, etc. sont tout au plus égaux à l_1, l_2, etc., *et où il y en a de plus petits*, hors ce cas, dis-je, on ne peut conclure, en toute rigueur, que (B) est plus simple que (A). On doit donc examiner les symboles complets des constructions que l'on compare ; l'on en tire : soit la constatation que (B) est absolument plus simple que (A), toutes

choses égales d'ailleurs, soit : rien du tout, *en toute rigueur.*

» Cependant, si ces mots : « rien du tout » sont théoriquement exacts, en pratique le nombre des opérations élémentaires, nombre que j'appelle le coefficient de simplicité, donne effectivement une *indication* utile, qui laissera rarement le traceur dans l'embarras, à ce point de vue. Les constructions représentées respectivement par : $6R_1 + 3R_2$ et par $60C_1 + 45C_3$ par exemple — et il n'y a pas besoin d'une telle différence — ne peuvent être rigoureusement comparées ; mais je doute que vous hésitiez à choisir la première, parce que, certainement, dans le sens habituel du mot, elle est plus simple que la seconde. Il est clair, ainsi, que nous nous entendions au fond ; c'est une affaire de mots, et je reconnais volontiers que mon exposé prête à objection.

» Il y a une de vos appréciations, au contraire, que je conteste, mais sans avoir d'idée à son sujet, la voici : « Est-il « absolument juste de donner la même influence au tracé « d'une droite ou à celui, *sensiblement plus délicat,* d'une circon- « férence ? » Sensiblement plus délicat, pourquoi ? Ce n'est pas spéculativement ; car une droite, un cercle, une spirale d'Archimède, etc., *sont;* mais ne sont pas plus compliqués l'une que l'autre, par essence ; ce sont les moyens de les tracer et de nous les représenter qui diffèrent ; c'est donc pratiquement que vous entendez parler. Eh bien ! je ne sais vraiment si, dans une épure, une portion de droite passant par deux points est plus ou moins difficile à tracer qu'une circonférence dont le centre est fixé et dont le rayon est dans le compas ; je l'ignore et je crois la question bien difficile à décider ; il y a huit jours, je vous aurais dit que je n'avais aucune notion à cet égard ; le hasard me permet de croire aujourd'hui que l'on peut — sans paradoxe — soutenir l'opinion qu'une droite est plus délicate à tracer *avec précision* qu'une circonférence. En effet, M. *Chomé,* professeur de Géométrie descriptive à l'École militaire de Belgique, m'envoie un traité fort bien fait, reproduction de son cours, où il y a *(planche 34)* 6 figures pour expliquer le texte qui précise les précautions à prendre quand on veut tracer exactement une droite ; au contraire, il y a fort peu de chose, sans figure, sur le tracé des circonférences.

» Cette question est, en tout cas, indifférente dans la géométrographie, qui est toute spéculative et que l'on doit appliquer aux constructions géométriques, comme l'ingénieur applique la Mécanique rationnelle aux constructions de son art. En voilà bien long, trop peut-être, mais j'espère au moins que, de mes explications, détaillées cette fois, naîtra la lumière.

» Et je vous serre bien affectueusement la main ».

CERTIFICAT D'APTITUDE
A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

Arithmétique et Géométrie.

I. Étant donnés deux nombres entiers A et B ayant pour plus grand commun diviseur Δ, montrer comment on peut trouver une infinité de systèmes de nombres entiers positifs ou négatifs x et y tels que l'on ait :

$$Ax + By = \Delta.$$

— Cas où $\Delta = 1$. — Démontrer, sans le secours des facteurs premiers que A^n et B^n ont pour plus grand commun diviseur Δ^n. —

Application : Trouver les solutions entières positives ou négatives de l'équation

$$93x + 77y = 19$$

et déterminer en particulier le système des deux nombres x et y entiers positifs ou négatifs qui vérifient cette équation, et dont la somme des valeurs absolues est la plus petite possible.

II. Un angle constant $MAP = \alpha$ tourne autour de son sommet A qui est un point fixe intérieur à une circonférence de centre O et de rayon R ; les côtés de cet angle et leurs prolongements rencontrent la circonférence aux points M, P, N, Q ; suivre les variations de l'aire du quadrilatère MPNQ quand le point M décrit la circonférence dans un sens déterminé, et chercher la position de l'angle α pour laquelle cette aire est égale à une donnée m^2. On posera $OA = a$, angle $MAB = x$, angle $PAB = y$, B étant l'extrémité du rayon qui passe par A.

III. Décomposer en éléments simples réels la fraction

$$\frac{x^6 + 1}{x^8 - 1}.$$

Géométrie et Mécanique.

GÉOMÉTRIE

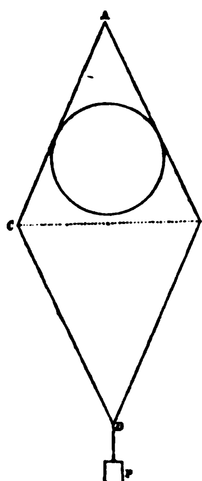
Étant donné un triangle rectangle OAB dont les côtés de l'angle droit sont $OA = a$ et $OB = b$, on considère toutes les droites Δ qui coupent OA, OB et AB ou leurs prolongements en des points M, N et P tels que le point P, situé sur AB, soit le milieu du segment MN ;

1° Former l'équation générale des droites Δ en prenant pour axes de coordonnées les côtés de l'angle droit du triangle donné;

2° Par un point R, donné dans le plan AOB, passent deux droites Δ du système considéré; former l'équation qui représente l'ensemble de ces deux droites et déterminer la région du plan dans laquelle doit être R pour qu'elles soient réelles;

3° Les deux droites Δ qui passent par le point R et les deux qui passent par un autre point R′ se coupent mutuellement en quatre points autres que R et R′, trouver la condition pour que ces quatre points soient sur une même circonférence : il faut et il suffit que la droite RR′ passe par un point fixe F, que l'on déterminera;

4° Lieu du centre de la circonférence précédente, quand R et R′ décrivent une droite fixe passant par F. Montrer que, pour un choix parti culier de la droite fixe, toutes les circonférences correspondantes sont concentriques.



MÉCANIQUE

Deux tringles égales AB et AC, articulées en A, s'appuient sur la surface d'un cylindre circulaire droit à axe horizontal; elles portent un fil BDC attaché en B et en C et de longueur égale à AB + AC; au milieu D de ce fil est suspendu un poids P. Déterminer la position d'équilibre du système en négligeant toute espèce de frottement et en négligeant le poids des tringles et du fil; calculer la tension du fil et les réactions du cylindre sur AB et sur AC. Les données sont :

$$AB = AC = BD = CD = a,$$
rayon du cylindre $= R$;

et l'inconnue : angle $ABC = x$ sera déterminée par sa tangente; on traitera complètement la question dans le cas particulier où $a = 7R$.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Calcul trigonométrique.

Calculer les angles et la surface d'un triangle, connaissant les trois côtés :

$$a = 2062; \qquad b = 1591; \qquad c = 981.$$

(8 juin, de 7 h. 30 à 8 h. 30.)

Épure.

1° Construire un tétraèdre TABC, dont la base ABC est sur le plan horizontal, connaissant les longueurs des six arêtes :

$$BC = 200^{mm}, \qquad CA = 189^{mm}, \qquad AB = 151^{mm},$$
$$TA = 113^{mm}, \qquad TB = 107^{mm}, \qquad TC = 131^{mm},$$

(BC parallèle à xy à la distance de 30mm, B à droite, A plus éloigné que BC de xy).

2° Construire un cône de révolution à axe vertical, dont la trace horizontale, tangente à AB, a pour centre la projection t de T, et dont les génératrices font, avec le plan horizontal, un angle égal à l'inclinaison de la face BTC sur le plan horizontal.

3° Construire l'intersection de la pyramide et du cône tangentes aux points remarquables.

Représenter la portion de la pyramide extérieure au cône; portion supposée opaque.

ÉCOLE NAVALE

Arithmétique et Algèbre.

1° Vraie valeur des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée.

2° Étude des variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 4x - a^2}{x^2 + 8x + a^2}$$

pour toutes les valeurs du paramètre a^2.

3° Calculer, à 0,001 près, la valeur de

$$\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}$$

Géométrie cotée.

Un triangle ABC est situé dans le plan de cote O. Ses côtés ont pour valeurs AB = 65mm, BC = 62mm CA = 51mm.

1° Construire, sur ce triangle, un tétraèdre SABC, sachant que ses arêtes opposées sont deux à deux rectangulaires et dont la hauteur, issue du sommet S, est donnée et égale à 20mm. — Sphère circonscrite à ce tétraèdre.

2° Construire le tétraèdre formé par les plans tangents menés à la sphère circonscrite au tétraèdre précédent, aux points SABC.

On se servira comme plan auxiliaire de projections du plan vertical parallèle à la droite joignant le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

Valeurs de x, comprises entre 0° et 360°, satisfaisant à l'équation

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + 15°\right) = \frac{(\sin 263° 32' 08'')^2 \times (\cos 160° 34' 15'')^2}{(\operatorname{tg} 222° 06' 31'')^3 \times (\cos 327° 49' 47'')}.$$

Géométrie et Géométrie analytique.

GÉOMÉTRIE

Plans perpendiculaires :

1° Lorsque deux plans sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième.

2° Si deux droites D et D′ rectangulaires sont situées respectivement dans deux plans P et P′ rectangulaires, l'une au moins des deux droites D et D′ est perpendiculaire au plan qui contient l'autre.

3° Les plans menés par les arêtes d'un trièdre, perpendiculairement aux faces opposees, se coupent suivant une même droite.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Ox et Oy étant deux axes rectangulaires, et A, A', B trois points situés sur ces axes, à la même distance de l'origine et disposés comme l'indique la figure, $OA = OA' = OB = R$, on demande:

1° L'équation des paraboles circonscrites au triangle AA'B en prenant, comme paramètre arbitraire, le coefficient angulaire f de l'axe. — Par chaque point du plan passent deux de ces paraboles : distinguer les régions du plan pour lesquelles ces deux paraboles sont réelles. — Le lieu des points pour lesquels les axes de ces deux paraboles sont rectangulaires est une circonférence C : construire, en coordonnées polaires, le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur les axes de toutes les paraboles circonscrites au triangle AA'B.

2° Lorsqu'un point M décrit la circonférence C, le point de rencontre des axes des deux paraboles passant par ce point décrit également une circonférence.

3° L'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABA', et dont les axes sont parallèles aux axes des deux paraboles passant par un point M de la circonférence C, passe par ce point M.

BACCALAURÉATS (*)

(NOVEMBRE 1892)

Académie de Caen.

Questions à choisir. — I. Par un point donné dans le plan vertical, mener une droite faisant des angles donnés avec chaque plan de projection.

II. Démontrer que, dans un triangle ABC, la bissectrice abaissée du sommet A a pour longueur

$$d = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2},$$

Cela posé, calculer les côtés b et c connaissant A, d et l'aire du triangle S. Condition de possibilité.

III. Définition des comètes. — Lois de leurs mouvements. — Rapports qu'elles ont avec les étoiles filantes.

Académie de Clermont.

(a). — I. On donne la trace horizontale d'un plan et l'angle que fait ce plan avec le plan horizontal. On demande : 1° de construire la trace verticale et l'angle du plan avec la ligne de terre; 2° en désignant par α l'angle de la trace horizontale avec la ligne de terre, par β l'angle du plan avec le plan horizontal, indiquer et démontrer les formules qui permettent de calculer l'angle de la trace verticale avec la ligne de terre, et l'angle du plan et de la ligne de terre.

II. *Questions à choisir :*

(*) Les énoncés où l'on donne des *questions à choisir* représentent ceux qui correspondent au *baccalauréat classique.*

1° Des trois formules

$$a = b \cos C + c \cos B,$$
$$b = c \cos A + a \cos C,$$
$$c = a \cos B + b \cos A,$$

déduire la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

2° Résoudre $a \sin x + b \cos x = c.$

3° Résoudre un triangle, connaissant b, c, A.

(b). — I. Construire une sphère concentrique à une sphère donnée, et telle, que le volume compris entre les deux sphères soit une moyenne proportionnelle entre les volumes des deux sphères.

II. Le moment de la résultante de deux forces concourantes est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

I. Théorème de Varignon. Le moment de la résultante de deux forces concourantes, par rapport à un point de leur plan, est la somme algébrique des moments des deux forces par rapport à ce point.

II. Un cercle de rayon R a pour diamètre AB; sur AB on prend un point P situé à une distance d du cercle. On demande de mener par P une sécante rencontrant le cercle en D et en E, la tangente au cercle au point B en C, et telle que l'on ait :

$$CD + CE = m\,BC.$$

Discussion.

Académie de Dijon.

(a). — On donne un triangle ABC et une droite L. Démontrer que la distance du point de rencontre des médianes du triangle ABC à la droite L, est le tiers de la somme des distances des trois sommets A, B, C, du triangle à la même droite.

(b). — On donne deux droites situées, l'une dans le plan vertical de projection, l'autre dans le plan horizontal parallèlement à la ligne de terre; et l'on demande de trouver, sur chacune d'elles, un point dont la distance à l'autre droite soit égale à une longueur donnée.

(c). — On donne le côté a d'un triangle équilatéral. On demande de calculer le rayon commun des trois circonférences égales, tangentes deux à deux et tangentes, chacune, à deux côtés du triangle.

Questions à choisir. — I. Résolution d'un triangle dans lequel on connaît deux côtés a, b, et l'angle A opposé à l'un d'eux. Examen des divers cas qui peuvent se présenter.

II. Résolution de l'équation $a \sin x + b \cos x + c = 0.$ Discussion.

III. Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

Problème. — Exprimer, au moyen de l'entier n, la somme

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - (2n-1)^2 + (2n)^2.$$

QUESTION 445

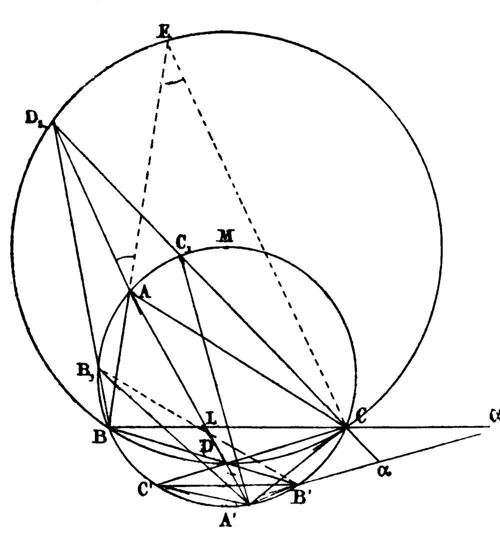
Solution par M. B. Sollertinsky.

Si la bissectrice de l'angle A *d'un triangle* ABC *rencontre en* L *le côté* BC *et en* A′ *la circonférence circonscrite, et qu'on porte sur cette bissectrice, de part et d'autre de* A, *les longueurs* AD, AD_1, *égales chacune à la moyenne géométrique entre* AL *et* AA′ : *1° Le*

quadrilatère DBD_1C *est harmonique;* 2° *Si* B', C', B_1, C_1, *sont les points où* DB, DC, D_1B, D_1C *rencontrent la circonférence* ABC, $DB'A'C'$, $D_1B_1A'C_1$ *sont des parallélogrammes (Réciproque de la question 339);* 3° *Ces deux parallélogrammes sont semblables;* 4° $A'C$ *est une symédiane du triangle* $B_1A'B'$ *et* $A'B$ *du triangle* $C_1A'C'$; 5° $B'B_1$, $C'C_1$ *sont égaux et divisés chacun en deux parties égales par* AA'; 6° *Les deux parallélogrammes semblables ont pour point autohomologue le milieu de* $A'C$ *ou le milieu de* $A'B$, *selon la manière dont on choisit les sommets homologues;* 7° *Les droites* $A'B'$ *et* CD_1, $A'C'$ *et* BD_1, $A'B_1$ *et* CD, $A'C_1$ *et* BD *se rencontrent sur la droite qui joint les milieux de* $A'B$ *et* $A'C$; 8° *Les circonférences circonscrites à* DCC_1, A_1CC' *se coupent sur le milieu de* $A'C$ *et, de même, les circonférences* DBB_1, D_1BB' *sur le milieu de* $A'B$.

(Bernès.)

La circonférence, décrite du milieu M de l'arc BAC, avec le rayon MB, rencontrera la bissectrice AA' aux points D, D_1. En effet, si BA rencontre la circonférence M et E, on aura $\widehat{BEC} = \frac{A}{2}$, d'où $AE = AC$, et, par suite, $AD^2 = AD_1^2 = AB.AC$; or on sait que $AB.AC = AL.AA'$.



1° Le quadrangle obtenu D_1BDC est harmonique, parce que EC étant parallèle à D_1D et A étant le milieu de D_1D, on a $E(D_1DBC) = -1$.

2° Puisqu'on a $\widehat{BB'A} = \widehat{CC'A} = \left(\frac{A}{2}\right) = BDC'$, $\widehat{BB_1A'} = \widehat{A'C_1C} = \left(\frac{A}{2}\right) = \widehat{BD_1C}$, les quadrilatères $DB'A'C'$, $D_1B_1A'C_1$ sont des

parallélogrammes, ayant les angles égaux, et en outre $\widehat{BB'C'} = (\widehat{BCC'}) = \widehat{BD_1D}$.

3° Ils sont donc semblables.

5° Les arcs B_1AC_1, $B'A'C'$, capables de l'angle $\left(\pi - \frac{A}{2}\right)$, étant égaux, B_1C_1 $B'C'$ est un trapèze; mais alors la droite AA', joignant les milieux de ses côtés B_1C_1, $B'C'$, passe aussi par les milieux de ses diagonales égales B_1B', C_1C'.

4° Ainsi, A'A est la médiane du triangle $B'A'B_1$, et, les arcs AB_1, CB' étant égaux, A'C est la symédiane correspondante.

6° Les parallélogrammes semblables B'A'C'D, $A'B_1D_1C_1$ sont construits sur les côtés B'A', $A'B_1$ du triangle $B'A'B_1$: leur point double est donc au milieu de la symédiane A'C du triangle.

Par suite, 8° Les points D et C_1, C' et D_1 étant leurs points homologues, les circonférences DCC_1, D_1CC' se rencontrent au milieu de A'C.

7° Soient α, α' les points où A'B' rencontre D_1C, BC.

Par la construction, $AD^2 = AL.AA'$, donc le faisceau $C(A'LDD_1)$ est harmonique, et le rayon CD étant parallèle à la transversale $A'\alpha'$, son conjugué CD_1 passe par le milieu α de $A'\alpha'$.

Ainsi, α est situé sur la droite joignant les milieux de A'C, et A'B.

QUESTION 462

Solution par M. **Foucart**, élève au lycée Michelet.

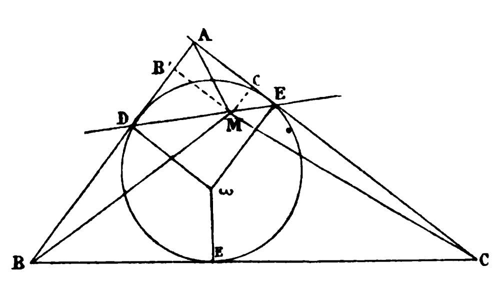
Soit M *un point quelconque de la droite passant par les pieds des perpendiculaires abaissées, du centre du cercle inscrit à un triangle rectangle* ABC, *sur les côtés de l'angle droit. Démontrer que l'expression*

$$U = (\overline{MB}^2 - \overline{MA}^2)\cos C + (\overline{MC}^2 - \overline{MA}^2)\sin C$$

représente le double de l'aire du triangle considéré.

(Louis Bénezech.)

Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées du centre du cercle inscrit sur AB et AC. Supposons le point M compris entre D et E; la démonstration suivante se ferait d'ailleurs d'une façon identique dans le cas contraire.



Soient a, b, c les côtés du triangle ABC; B′ et C′ les projections de M sur AB et AC. Les triangles AMB et AMB donnent

$$\overline{MB}^2 - \overline{MA}^2 = c^2 - 2c.AB',$$
$$\overline{MC}^2 - \overline{MA}^2 = b^2 - 2b.AC'.$$

D'après cela,

$$U = (c^2 - 2c.AB')\frac{b}{a} + (b^2 - 2b.AC')\frac{c}{a} = \frac{bc}{a}(b + c - 2AB' - 2AC').$$

En observant que $AC' = MB' = DB'$,

on a $$U = \frac{bc}{a}(b + c - 2AD) = \frac{bc}{a}(BD + CE).$$

Mais $$BD + CE = BC.$$

Finalement $$U = bc.$$

NOTA. — Solutions diverses par MM. GROLLEAU, répétiteur au lycée de Marseille; DROZ-FARNY; W.-J. GREENSTREET; B. SOLLERTINSKY.

QUESTION 463

Solution par M. B. SOLLERTINSKY.

Si la hauteur $A\mu$ *d'un triangle* ABC *rencontre la circonférence décrite sur* BC *comme diamètre, en un point* M *tel que*

(1) $$\overline{\mu A}^2 = \mu M(\mu M + BC),$$

la droite joignant les points de Brocard sera perpendiculaire sur BC. (E. Lemoine.)

Soit O le milieu de BC. On a

$$\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

mais $$\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{\mu A}^2 - \overline{\mu M}^2.$$

Donc, d'après (1)

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \mu M . a;$$

d'où $$\mu M = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2a}.$$

Par suite

$$\overline{\mu A}^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2a}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2a} + a\right)$$
$$= \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{4a^2}$$

d'où $$16S^2 = (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 + c^2);$$

ce qui donne

$$\frac{2S\,a}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)a}{8S} = \frac{2abc \cos A}{8S} = R \cos A,$$

C'est-à-dire que le point de Lemoine K et le centre D du cercle ABC sont équidistants de BC; mais la droite joignant les points de Brocard est perpendiculaire sur KD.

Remarque. — On peut observer que

La droite d'Euler du triangle ABC *est perpendiculaire sur la symédiane issue de* A, *lorsque la droite qui joint les points de Brocard est perpendiculaire sur* BC.

QUESTION 468

Solution par M. W. Greenstreet.

Calculer les côtés d'un triangle, connaissant son périmètre 2p, *la somme* δ^2 *des carrés des côtés et sachant que*

$$2bc = a(b + c). \qquad \text{(Lauvernay.)}$$

Nous avons le système

$$\Sigma(a) = 2p; \quad \Sigma(a^2) = \delta^2; \quad 2\Sigma(ab) = 4p^2 - \delta^2, \quad 2bc = (b + c)a.$$

Aussi $$2bc = (b + c)a = (2p - a)a;$$

d'où $$4p^2 - \delta^2 = 3a(2p - a).$$

Cette égalité détermine a.

D'autre part, les équations $b + c = 2p - a$, $bc = \frac{a}{2}(2p - a)$, prouvent que b, c sont les racines de l'équation

$$2x^2 - 2(2p - a)x + a(2p - a) = 0, \qquad \text{etc...}$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Vazou; Foucart.

QUESTIONS PROPOSÉES

520. — Étant donné un triangle AOB rectangle en O, on abaisse de O la hauteur OH sur AB, puis HA′ et HB′ sur OA et OB. On obtient ainsi un second triangle A′OB′. On abaisse de même la hauteur OH′ sur A′B′, puis H′A″ et H′B″ sur OA et OB. On a ainsi un troisième triangle A″OB″ avec une nouvelle hauteur OH″. On opère ainsi de suite, indéfiniment.

Montrer que $\lim_{n=\infty} \Sigma\,[OH] = \dfrac{OA.OB.AB}{\overline{AB}^2 - OA.OB}.$

(*E.-B. Barisien.*)

521. — On donne un polygone fermé dont les sommets successifs sont A, B, C, D...

Deux mobiles M et N sont placés à l'instant zéro : l'un, M, sur le côté AB, l'autre, N, sur le $p^{\text{ième}}$ côté ; AB étant le premier côté, BC le second, etc.

Ils se meuvent tous deux à partir de l'instant zéro dans les conditions suivantes :

M reste *m* secondes sur AB, puis il saute sur BC où il reste *m* secondes, puis il saute sur CD où il reste *m* secondes et ainsi de suite.

N reste *n* secondes sur le $p^{\text{ième}}$ côté, puis il saute sur le $(p+1)^{\text{ième}}$ côté où il reste *n* secondes, puis il saute sur le $(p+2)^{\text{ième}}$ côté où il reste *n* secondes et ainsi de suite.

On demande :

1° D'indiquer les moments où ils se trouvent ensemble sur un même côté et de désigner le numéro d'ordre de ce côté pour le $K^{\text{ième}}$ séjour simultané ;

2° Combien de temps durera ce séjour ;

3° A quelle condition pourront-ils sauter au même instant sur un même côté.

Même problème en admettant que les mobiles se meuvent en sens contraire. (*E. Lemoine.*)

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15736-7-93.

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$

ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. **A. Aubry.**

(*Suite*, voir page 171).

28. — Quel que soit le mérite de ces méthodes que, pour plus de clarté, nous venons de traduire en langage analytique moderne, elles cèdent, sous le rapport pratique, à celle que nous avons rappelée au n° 23. Celle-ci, certainement, était connue des Arabes, bien qu'on ne la voie exposée pour la première fois que par Gergonne (*Ann. de math.* t. XX) (*). Comme elle nécessite une série de divisions de plus en plus pénibles, nous proposerons la modification suivante.

Posons $1 \pm x = q$, dans (2), (3); on trouve

$$\sqrt{q} \lessgtr \frac{1 + 3q}{3 + q} \quad \text{selon qu'on a} \quad \begin{cases} 1 < q < 2 \\ 1 > q > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

De là ce théorème : q *désignant un nombre fixe compris entre* $\frac{1}{2}$ *et* 2, *si l'on calcule successivement les quantités :*

$$\begin{array}{ll} a = 1 + 3q, & A = 3 + q, \\ b = a^2 + qA^2, & B = 2aA, \\ c = b^2 + qB^2, & C = 2bB \\ d = c^2 + qC^2, & D = 2cC \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

les rapports $\frac{a}{A}, \frac{b}{B}, \frac{c}{C}, \ldots$ *tendent vers* $\sqrt{q}$.

En effet, on a

$$\frac{b}{B} = \frac{a}{2A} + \frac{qA}{2a}, \quad \frac{c}{C} = \frac{b}{2B} + \frac{qB}{2b}, \ldots \quad (**)$$

(*) Voir aussi : J. Vielle, *Approximations numériques* et J. Bertrand, *Arithmétique*.

(**) *Autrement*. Soit $\sqrt{q} \gtrless \frac{a}{A}$. Posons $\sqrt{q} - \frac{a}{A} = \pm \varepsilon$. Comme on a $\varepsilon < 1$, les puissances positives de ε tendent vers zéro, quand l'exposant augmente. Or

Soit $q = 2$, c'est le cas le plus défavorable au point de vue de la rapidité de la convergence. On trouve les rapports

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{99}{70}, \quad \frac{19601}{13860}, \ldots$$

dont le dernier donne la racine de $\sqrt{2}$ avec huit décimales exactes. On aurait une approximation bien plus prompte en partant des égalités (α) du n° **24**.

29. — Connaissant une approximation $\frac{g}{G}$ de $\sqrt{q}$, il est facile d'en trouver une autre de sens contraire, ce qui permettra d'apprécier l'erreur commise.

Soit $\sqrt{q} \gtrless \frac{g}{G}$. On a immédiatement

$$\frac{\sqrt{q}}{q} = \frac{1}{\sqrt{q}} \lessgtr \frac{g}{G};$$

d'où

(α) $$\frac{g}{G} \lessgtr \sqrt{q} \lessgtr q\frac{G}{g}.$$

Or, la moyenne arithmétique de $\frac{g^2 + qG^2}{2gG} = \frac{h}{H}$ de ces deux

---

$$\varepsilon^2 = q + \frac{a^2}{A^2} - \frac{2a}{A}\sqrt{q} = \frac{b - B\sqrt{q}}{A^2}, \quad \varepsilon^4 = \frac{b^2 + B^2q - 2bB\sqrt{q}}{A^4} = \frac{c - C\sqrt{q}}{A^4},$$
$$\varepsilon^6 = \frac{d - D\sqrt{q}}{A^6}, \ldots$$

Donc les expressions $b - B\sqrt{q}$, $c - C\sqrt{q}$, $d - D\sqrt{q}, \ldots$ tendent vers zéro. Cette démonstration fait voir que si $\frac{a}{A}$ est approchée à 0,1 près, $\frac{b}{B}$ le sera à 0,01, $\frac{c}{C}$ à 0,0001, etc : chaque nouvelle approximation doublera le nombre des chiffres obtenus.

En général, soit $\sqrt{q} - \alpha = \varepsilon < 1$, on aura, pour un entier positif,

$$\varepsilon^m = (\sqrt{q} - \alpha)^m$$
$$= \pm\left[\alpha^m - \frac{m}{1}\alpha^{m-1}\sqrt{q} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-1}q - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}q\sqrt{q} + \ldots\right]$$

$$\sqrt{q} = \frac{\alpha^m + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}q + \ldots \pm \varepsilon^m}{\frac{m}{1}\alpha^{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}q + \ldots}$$

$$= \frac{\alpha^m + \frac{m(m-1)}{2}\alpha^{m-2}q + \ldots}{m\alpha^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}\alpha^{m-3}q + \ldots} \text{ (sensiblement).}$$

limites de $\sqrt{q}$ est plus grande que leur moyenne géométrique, laquelle est $\sqrt{q}$: on peut donc dire que, quel que soit le sens de la première approximation $\frac{g}{G'}$, la seconde $\frac{h}{H}$ est par excès. Quant à l'erreur commise, elle est inférieure à la demi-différence $\frac{g^2 - qG^2}{2gG}$ des deux limites (α), et en trop.

Ainsi, en employant les notations du numéro précédent, on peut dire que *les termes de la série*

$$\frac{a}{A}, \quad \frac{qA}{a}, \quad \frac{b}{B}, \quad \frac{qB}{b}, \quad \frac{c}{C}, \quad \frac{qC}{c}, \ldots$$

oscillent autour de la limite $\sqrt{q}$. On voit d'ailleurs que la formation de ces mêmes termes revient à calculer les deux premiers $\alpha = \frac{a}{A}$, $\alpha' = \frac{q}{\alpha}$, et alternativement prendre la demi-somme $\beta = \frac{\alpha + \alpha_1}{2}$ des deux précédents et le quotient de q par le précédent $\beta' = \frac{q}{\beta}$;

puis $$\gamma = \frac{\beta + \beta'}{2}, \qquad \gamma' = \frac{q}{\gamma}; \ldots$$

On a ainsi une nouvelle démonstration du théorème du numéro précédent, avec des perfectionnements notables.

Soient par exemple :

$$\frac{g}{G} = \frac{7}{5}, \qquad q = 2.$$

On aura $$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{10}{7};$$

d'où $$\sqrt{2} < \frac{99}{70}.$$

En posant $$\sqrt{2} = \frac{99}{70},$$

on aura une erreur, en excès, moindre que $\frac{1}{70}$.

(A suivre.)

SUR LES CERCLES TANGENTS
A DEUX COTÉS D'UN TRIANGLE ET AU CERCLE CIRCONSCRIT

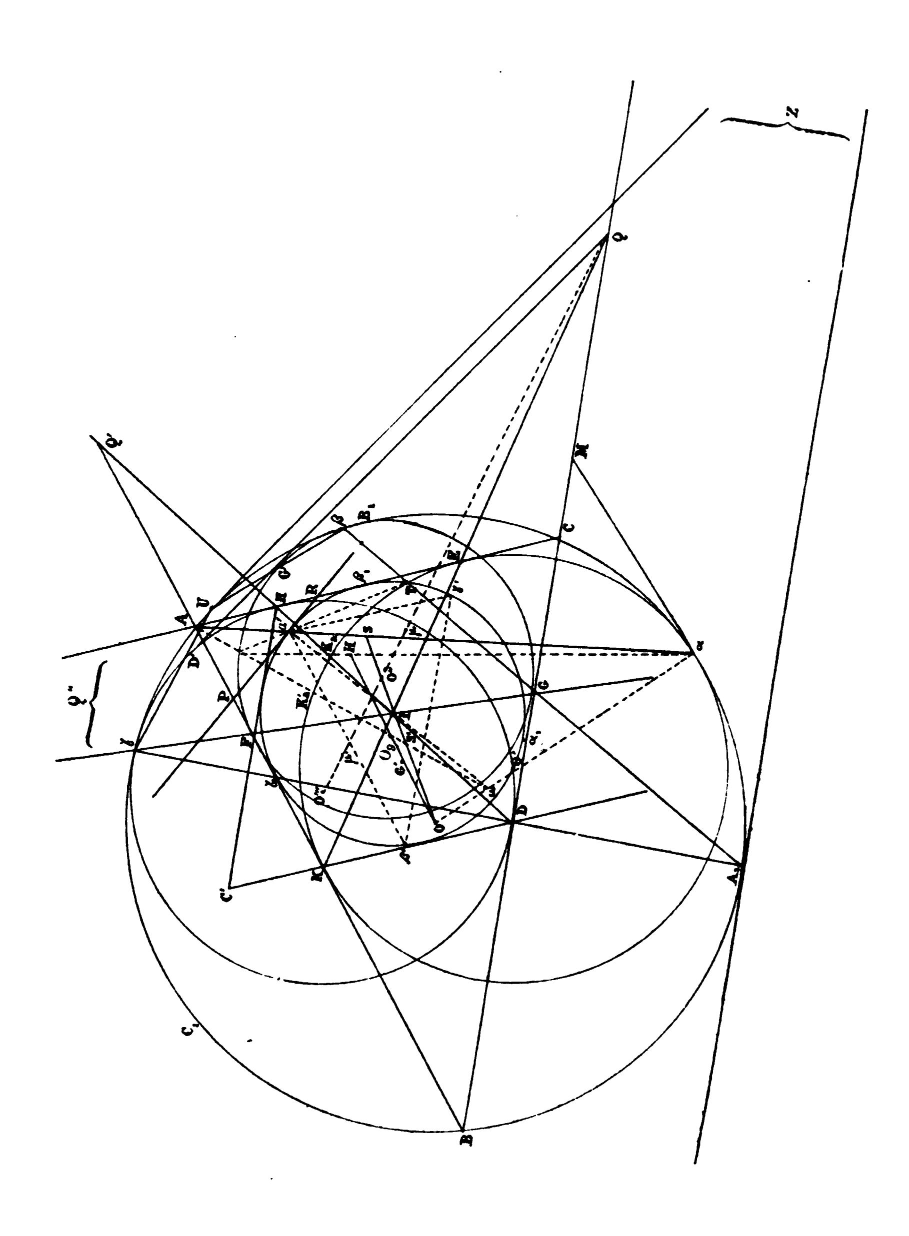
par M. **H. Verrière,** élève au Lycée Louis-le-Grand.

Notations.

ABC est le triangle fondamental;
O le centre du cercle circonscrit;
α, β, γ sont les points de contact des cercles O′, O″, O‴ avec le cercle O;
A′B′C′ est le triangle formé par les droites FH, KD, GE;
H, O_9 sont, respectivement, l'orthocentre et le centre du cercle d'Euler;
Q, Q′, Q″ sont les centres de similitude directe des trois cercles O′, O″, O‴ ;
I est le centre du cercle inscrit;
O′, O″, O‴ sont les centres des cercles tangents à deux côtés et intérieurement au cercle circonscrit. KE, FG, DH sont les points où les trois cercles O′, O″, O‴ touchent les côtés;
D′, G′ sont les points où la seconde tangente commune extérieure touche les cercles O‴O″;
α', β', γ', sont les points où les droites Aα, Bβ, Cγ coupent la circonférence I;
α_1, β_1, γ_1 sont les points où le cercle I touche les côtés.

I. — *Si l'on décrit un cercle tangent aux deux côtés d'un triangle et tangent, intérieurement, au cercle circonscrit à ce triangle, le milieu de la corde joignant les points de contact du cercle et des côtés sera le centre du cercle inscrit.* (Ce théorème est dû à M. Mannheim.)

Nous allons démontrer que le cercle O′, tangent en K et en E, aux côtés AB, AC, est tangent au cercle O. (K et E étant considérés comme les points d'intersection des côtés et de a perpendiculaire en I à AI). Soit γ le point milieu de $\gamma_1\beta_1$. Transformons la figure par inversion, en prenant I pour pôle et $I\alpha_1^2$ pour module; le transformé du cercle O est le cercle d'Euler, du triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Les points KE ont pour réciproques



les projections des points γ_1 et β_1 sur KE. D'autre part, l'application de la formule donnant le rayon du transformé du cercle O' montre que ce rayon est égal à $I\alpha_1$. Le cercle a donc pour transformé un cercle de centre γ et de rayon $I\alpha_1$, évidemment tangent à la transformée de la circonférence O.

Autrement (cette démonstration m'a été communiquée par mon camarade M. Clairin) :

Si l'on transforme par inversion symétrique en prenant A pour pôle et le produit AB, AC comme puissance ; le cercle O'*a* pour transformé le cercle exinscrit dans l'angle A, comme on s'en assure facilement par le calcul ; le cercle O' est par suite tangent à la transformée de la droite BC, c'est-à-dire au cercle O.

II. — *Les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *sont concourantes en un point* S.

Les points α, β, γ ayant, pour transformés en inversion symétrique, les points où les cercles exinscrits I_α, I_β, I_γ touchent respectivement les côtés BC, CA, AB ; les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, sont concourantes au point isogonal du point de Nagel du triangle ABC. Ce point est en même temps le centre de similitude directe des cercles O et I, et le pôle, relativement au cercle O de l'axe de similitude directe des cercles O', O'', O'''.

De même, si l'on considérait les points α_2, β_2, γ_2 où les cercles tangents à deux côtés d'un triangle et tangents, extérieurement, au cercle circonscrit touchent ce dernier, on verrait que les droites $A\alpha_2$, $B\beta_2$, $C\gamma_2$ concourent au point S' isogonal du point de Gergonne et centre de similitude inverse des cercles O et I. On obtient des théorèmes analogues en considérant les cercles inscrits dans les suppléments des angles tangents et extérieurement au cercle O.

III. — *Les droites* AA', BB', CC', *concourent en* I.

En effet, d'après le (I), les droites FG, HD se coupent en leur milieu I. Les angles FHI, IDG sont égaux ; par suite les droites FH, BC sont parallèles, de même que les droites GE, AB, DK, AC ; les triangles ABC, A'B'C' sont donc homothétiques, et les droites AA', BB', CC' concourent en I.

L'hexagone FHEGDK est circonscrit au cercle I.

On a : $\mathrm{FH} = \dfrac{a(p-a)}{p}$; $\mathrm{GE} = \dfrac{c(p-c)}{p}$; $\mathrm{KI} = \dfrac{b(p-b)}{p}$.

IV. — *Soient* A_1, U *les points d'intersection des droites* γD, βG; $\gamma D'$, $\beta G'$. *Ces points sont sur la circonférence* O; *la droite* A_1U *et les deux droites analogues sont concourantes.*

Soient A'_1, A''_1 les points où la parallèle à $O'''D$, menée par O, rencontre les droites γD, βG; par suite de la similitude des triangles $\gamma O'''D$, $\gamma OA'_1$; $O''\beta G$, $\beta OA''_1$; les longueurs OA'_1, OA''_1 sont égales, et les points A'_1 A''_1 se confondent en un même point A_1; on a en outre : $OA_1 = O\gamma = O\beta$. Le point A_1 est donc sur la circonférence O. On démontrerait de même que les droites $\gamma D'$, $\beta G'$ se coupent en U, sur cette circonférence O. D'autre part, les points γ, β; $D'G'$; D, G étant antihomologues, les points A_1U sont sur l'axe radical des cercles $O''O'''$. Par suite la droite A_1U et les deux droites analogues concourent au centre radical des cercles $O'O''O'''$.

V. — *Le quadrilatère* $A_1\gamma U\beta$ *est harmonique.*

Par suite de l'égalité : $A_1O.A_1\gamma = A_1G.A_1\beta$, le quadrilatère $\gamma\beta DG$ est inscriptible, et les angles $\widehat{\beta GC}$, $\widehat{A_1\gamma\beta}$ sont égaux. Si donc nous menons la tangente A_1Z au cercle ABC, en A_1; nous avons :

$$\widehat{BA_1Z} = \widehat{BGC_1}.$$

Les droites A_1Z, BC sont donc parallèles; il s'ensuit que A_1 est le point où la bissectrice intérieure de l'angle A coupe la circonférence O (*). Or la droite A_1U partage le segment DG en deux parties égales, le faisceau $A_1(ZGUD)$ est harmonique; le quadrilatère $A_1\gamma U\beta$ est donc harmonique.

La tangente en U, au cercle ABC, est de même parallèle à la droite $O'G'$; si donc Z est le pôle de la droite A_1U relativement à la circonférence ABC, les points Z, O, γ, β sont en ligne droite.

VI. — *Soient* $A_1B_1C_1$ *les points où les bissectrices intérieures du triangle* ABC *coupent la circonférence* O; *le triangle* $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ *formé par les tangentes en* α, β, γ, *au cercle* O, *est homologique au triangle* $A_1B_1C_1$ *et au triangle* ABC.

(*) Ceci pouvait être prévu. Car les droites γD et βG passant : l'une, par les centres de similitude de O''' avec le cercle O et le côté BC, l'autre par les centres de similitude de O'' avec O et BC, concourent au centre de similitude de O et de BC, c'est-à-dire au milieu de l'arc BC.

En effet, le point γ_3 de rencontre des tangentes en α, β est sur l'axe radical des cercles O′, O″. Les triangles $\alpha_3\beta_3\gamma_3$, $A_1B_1C_1$ sont homologigues, puisque les droites joignant leurs sommets sont les axes radicaux des cercles O′, O″, O‴. Soit M le point où la tangente en α coupe le côté BC, on a :

$$MC = \frac{\sin \widehat{\alpha AC} . \alpha C}{\sin \widehat{\alpha MC}}, \qquad MB = \frac{\sin \widehat{BA\alpha} . B\alpha}{\sin \widehat{\alpha MC}};$$

d'où
$$\frac{MC}{MB} = \frac{\sin \widehat{\alpha AC} . \alpha C}{\sin \widehat{BA\alpha} . B\alpha} = \frac{\sin^2 \widehat{\alpha AC}}{\sin^2 \widehat{BA\alpha}} = \left[\frac{(p-c)b}{(p-b)c}\right]^2 = \frac{\overline{IC}^4}{\overline{IB}^4}.$$

On obtient de même pour les rapports $\frac{NB}{NA}$, $\frac{PA}{PC}$ (N et P étant les points où les tangentes en β, γ coupent les côtés AC, BA) les valeurs $\frac{\overline{IB}^4}{\overline{IA}^4}$, $\frac{\overline{IA}^4}{\overline{IC}^4}$.

On a : $\frac{MC.NB.PA}{MB.NA.PC} = 1$. Les droites $A\alpha_3$, $B\beta_3$, $C\gamma_3$ sont donc concourantes. D'ailleurs, cette propriété n'est pas particulière à l'isogonal du point de Nagel, et l'on a ce théorème général : *Un point étant pris dans le plan d'un triangle; si, par les points où les droites joignant ce point aux sommets rencontrent la circonférence circonscrite, on mène des tangentes à celle-ci, le triangle ainsi formé est homologique au triangle fondamental.*

VII. — *Les droites* KE, FG, DH *rencontrent, respectivement, les côtés* BC, AC′, AB *aux points* Q, Q′, Q″.

Soit Q_1 le point d'intersection de la droite KE et du côté BC; on a, par suite de la similitude des triangles : Q_1EC, Q_1KD; Q_1EG, Q_1KB; les rapports.

$$(1) \qquad \frac{Q_1E}{Q_1K} = \frac{Q_1C}{Q_1D} = \frac{Q_1G}{Q_1B} = \frac{Q_1G - Q_1C}{Q_1B - Q_1D} = \frac{GC}{BD}.$$

D'autre part, on a

$$Q\beta . Q\gamma = QC'.QB = QG.QD.$$

Donc

$$(2) \qquad \frac{GC}{BD} = \frac{QC}{QD} = \frac{QG}{QB}.$$

Comparant les égalités (1) et (2), on voit que les points Q, Q_1 se confondent. Les points Q, Q′, Q″ sont en ligne droite.

Observons que Q est le point conjugué du pied de la symédiane du triangle BIC, et que, par suite, la droite IQ est tangente au cercle BIC.

On sait que G *et* H *étant le centre de gravité et l'orthocentre du triangle* ABC, *les droites* GS′, HS *se coupent au point* T *de tangence du cercle d'Euler et du cercle inscrit.*

VIII. — *Si* ω *est un point situé sur* $O\alpha$ *et équidistant des points* α, α', *les droites* ωO_9, αH, $T\alpha'$ *sont concourantes.*

Menons $\alpha' I$ qui coupe $O\alpha$ en ω', et décrivons un cercle de ce point comme centre avec $\omega'\alpha'$ pour rayon. Le point α' est le centre de similitude directe des cercles I et ω'. La droite $A\alpha'$ contient donc le centre de similitude directe des cercles $O'\omega'$, lequel, par suite, est α. Les cercles $\omega' O$ sont donc tangents en α, et l'on a : $\omega'\alpha' = \omega'\alpha$. D'où il résulte que le point ω' n'est autre que ω.

Ceci posé, considérons les cercles I, O_9, ω; la droite $T\alpha'$ contient le centre de similitude directe des cercles ωO_9. De même, si l'on considère les cercles OO_9, ω, on voit que la droite αH contient aussi le centre de similitude directe des cercles ω, O_9. Les deux droites $T\alpha'$, αH se coupent donc sur la ligne des centres ω, O_9.

IX. — *Soient* μ, μ' *les points milieux des cordes* GG′, DD′. *La circonférence* $B\mu Q$, *et les deux circonférences analogues, ainsi que la circonférence* $\mu' CQ$ *et les deux circonférences analogues, ont un point commun.*

On a en effet, d'après le 1° :

$$\overline{O''G}^2 = O''\mu . O''Q = O''I . O''B.$$

La circonférence $B\mu Q$ passe donc par le point I; de même, on a :

$$O'''\mu' . O'''Q = O'''I . O'''C.$$

La circonférence $C'\mu' Q$ passe donc aussi par le point I; ce qui justifie l'énoncé.

X. — *Les tangentes en* α', β', γ' *au cercle* I, *sont antiparallèles aux côtés du triangle* ABC. *Le triangle formé par ces droites est orthologique au triangle* ABC′.

Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est homothétique au triangle ABC, puisque le point S est le centre de similitude directe des cercles O, I. On a donc, P et R étant les points où la tangente en α' coupe

les côtés AB, AC :

$$\widehat{P\alpha'\beta'} = \widehat{\alpha'\gamma'\beta'} = \widehat{C} = \widehat{AP\alpha'}.$$

Ainsi la droite PR est antiparallèle au côté BC.

Par suite de l'égalité des angles des tangentes en α', β', avec le côté AB, les perpendiculaires abaissées du sommet du triangle formé par les tangentes en α', β', γ', sur les côtés du triangle ABC, concourent en I. On voit d'autre part, facilement, que les perpendiculaires abaissées des sommets de ABC sur les côtés PR, etc., concourent en O.

La tangente FH *au cercle inscrit, parallèle au côté* BC, *est tangente à ce cercle au point où la droite joignant le sommet* A *au point de Nagel le coupe.*

XI. — *Les droites* PR, FH *se coupent sur la bissectrice de l'angle* A. *Les cercles* APR, AFH *sont tangents en* $K_aK'_a$ *au cercle* O'; *soient* $K_bK'_b$; K_cK_c *les points analogues. Les droites* AK_a, BK_b, CK_c; AK'_a, BK'_b, CK'_c *sont concourantes.*

D'après le 1°, I étant le centre du cercle ex-inscrit aux triangles APR, AFH, le cercle tangent aux côtés AB, AC en K, E est tangent aux cercles circonscrits à ces triangles. La première partie de l'énoncé est donc démontrée.

Transformons la figure par inversion, en prenant A pour pôle et le produit $AP.AB = AR.AC'$ comme puissance. La droite PR ayant pour transformée le cercle ABC, le cercle O' a pour transformé le cercle I, et la circonférence APR a pour transformée la droite BC. Il s'ensuit que le point K_a a pour réciproque le point α_1, et que les points A, K_α, α_1 sont en ligne droite. Les droites AK_a, BK_b, CK_c concourent donc au point de Gergonne.

Si, d'autre part, on transforme la figure en prenant A pour origine et le produit $AF.AP = AR.AH$ pour puissance, les cercles APR, AFH, O' ont pour transformées les droites FH, PR et le cercle inscrit aux triangles APR, AFH; le point K'_a a pour transformé le point où PR touche le cercle inscrit au triangle APR; or, ce dernier point est sur la droite isogonale de AK_a; donc les droites AK'_a, BK'_b. CK'_c concourent au point isogonal du point de Gergonne.

On peut établir des théorèmes analogues concernant le point de Nagel et son isogonal.

Remarque. — Le centre du cercle APR est sur la hauteur du triangle ABC. Le cercle AFH est tangent au cercle O en A; d'où l'on déduit que son centre est sur le cercle bissecteur des cercles O, O'.

XII. — *Les deux cercles tangents aux côtés* AB, AC *et intérieurement ou extérieurement au cercle circonscrit; les deux cercles tangents extérieurement au cercle* ABC' *et respectivement, au côté* BA *prolongé dans le sens* AB, *au côté* AC *prolongé dans le sens* CA; *au côté* BA *prolongé dans le sens* BA *et au côté* AC *prolongé dans le sens* AC; *sont tangents à un même cercle différent du cercle* ABC.

En effet, les deux premiers cercles sont les transformés, par inversion symétrique, du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit dans l'angle A; les deux derniers sont les transformés, par inversion symétrique, des cercles ex-inscrits dans les angles C' et B. Ces quatre cercles sont donc tangents au transformé du cercle d'Euler, c'est-à-dire à une circonférence passant par le point diamétralement opposé au sommet A, par le point où la symédiane issue de A coupe le cercle circonscrit, etc.

On voit ainsi que, suivant le sommet pris pour pôle, on transforme le cercle des neuf points en trois cercles dont chacun est tangent à quatre autres cercles...

XIII. — *Si l'on désigne par* R_a, R_b, R_c; R'_a, R'_b, R'_c *les rayons des cercles tangents à deux côtés d'un triangle (intérieurement, pour les premiers; extérieurement, pour les autres) au cercle circonscrit, on a les formules et les relations suivantes :*

$$R_a = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{4Rr}{r_b + r_c}; \quad R'_a = \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{4Rr_a}{r_b + r_c},$$

$$R_b = \frac{r}{\cos^2 \frac{B}{2}} = \frac{4Rr}{r_a + r_c}; \quad R'_b = \frac{r_b}{\cos^2 \frac{B}{2}} = \frac{4Rr_b}{r_a + r_c},$$

$$R_c = \frac{r}{\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{4Rr}{r_a + r_b}; \quad R'_c = \frac{r_c}{\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{4Rr_c}{r_a + r_b}.$$

$$R'_a R'_b R'_c = 16R^2 r = \frac{a^2b^2c^2}{pS}; \qquad R_a R_b R_c = \frac{16R^2 r^3}{p^2}$$

$$\frac{2R-r}{2Rr}=\frac{1}{R'_a}+\frac{1}{R'_b}+\frac{1}{R'_c}; \qquad \frac{2Rr}{4R+r}=\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c};$$

$$BG=\frac{ac}{p}, \quad CG=\frac{a(p-c)}{p}, \quad DG=\frac{a(p-a)}{p}, \quad \overline{BO''}^2=\frac{a^2c^2}{p^2(p-b)}.$$

EXERCICES DIVERS

Par M. Boutin.

(*Suite*, voir page 159).

281. — *Si, dans un triangle,* $a^2 = 2bc$, *le cercle de Brocard est tangent au côté* BC *au pied de la bissectrice de l'angle* A, *et l'angle de Brocard est donné par la formule :*

$$\cos 2\theta = \frac{b^4+c^4+4b^2c^2}{2bc(2b^2+2c^2+bc)}.$$

282. — *Soit* A'B'C', *le triangle pédal d'un point* M. *De* A, B, C, *on abaisse des perpendiculaires sur* B'C', C'A', A'B'. *Lieu de* M *lorsque ces perpendiculaires sont concourantes?*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées normales de M. On trouve pour équation de l'une de ces perpendiculaires,

$$y\left(\frac{1}{z_1}-\frac{\cos A}{y_1}+\frac{\cos B}{x_1}\right)=z\left(\frac{1}{y_1}-\frac{\cos A}{z_1}+\frac{\cos C}{x_1}\right).$$

D'où, tous calculs faits, pour qu'elles soient concourantes, la condition

$$\sum \alpha_1 \operatorname{cotg} A(\beta_1^2-\gamma_1^2)=0\,;$$

α_1, β_1, γ_1, coordonnées barycentriques de M. C'est la cubique des réciproques relative au réciproque de l'orthocentre.

Dans ce cas, les perpendiculaires à BC, AC, AB, menées respectivement par A', B', C', sont concourantes en P, le triangle A'B'C' est aussi podaire, et les perpendiculaires considérées dans l'énoncé concourent en P_1, inverse de P. Le lieu de P_1 est donc la cubique des inverses relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre, courbe déjà si souvent rencontrée.

283. — *Un triangle* ABC *est coupé par une transversale* A'B'C', *les orthocentres des triangles* ABC, AB'C', BA'C', CA'B', *sont quatre points en ligne droite.*

Soit $lx+my+nz=0$, en coordonnées normales, l'équation de la transversale. On trouve aisément, pour équations des perpendiculaires abaissées de B' sur AB et de C' sur AC :

$$lx\cos A+my\cos A+z(m-l\cos C)=0,$$
$$lx\cos A+y(n-l\cos B)+nz\cos A=0.$$

Les coordonnées de l'orthocentre de AB'C' sont donc :

$$x:y:z=ln\cos C+lm\cos B-l^2\cos B\cos C-mn\sin^2 A$$
$$:l\cos A(m-\ \cos C-n\cos A):l\cos A(n-l\cos B-m\cos A).$$

Par suite, l'équation de la droite qui joint ce point à l'orthocentre de ABC

(1) $$\sum lx \cos A(n \sin B - m \sin C) = 0.$$

La symétrie de cette équation montre que la droite qu'elle représente passe également par les orthocentres des deux autres triangles.

Cette droite passe aussi par le point dont les coordonnées vérifient les égalités $lx \operatorname{cotg} A = my \operatorname{cotg} B = nz \operatorname{cotg} C.$

Applications :

Si la transversale est l'axe antiorthique, (1) est :

$$\sum (b - c)x \cos A = 0.$$

Si la transversale est l'axe orthique, (1) est la droite HK.

On peut encore déduire des formules précédentes que le lieu de l'orthocentre du triangle AB'C', par exemple, quand B'C' tourne autour d'un point fixe, est une hyperbole passant par A.

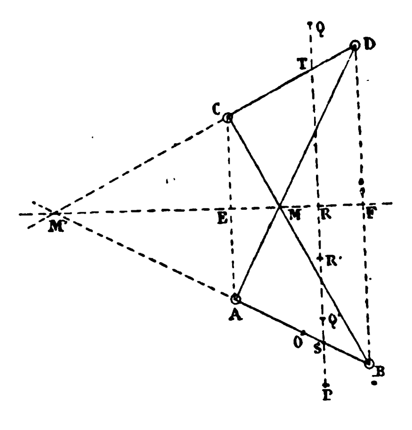
Quand B'C' enveloppe une conique inscrite dans ABC, le lieu de l'orthocentre de AB'C' est encore une conique.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. J. Neuberg :

Permettez-moi de rappeler, à propos de la *Note sur un ellipsographe* (*J. M.* 1893, p. 15), des développements qui pourront intéresser les lecteurs de votre journal, bien qu'ils aient déjà été donnés il y a une vingtaine d'années.

Considérons un *contreparallélogramme articulé* ABCD, c'est-à-dire un quadrilatère articulé, *étoilé,* dont les côtés opposes AB et CD, AD et BC sont égaux. Si, le côté AB restant fixe, le contreparallélogramme se déforme, les diagonales AC, BD sont toujours parallèles ; on en conclut que le point d'intersection M des côtés AD, BC décrit une ellipse ε ayant pour foyers les points A, B et dont le grand axe est égal à AD ; la tangente en M est la droite EF joignant les milieux des diagonales.



Cette propriété conduit à un *ellipsographe* qui est peu pratique,

On arrive à un ellipsographe pratique en observant que les points d'un plan emporté par la tige CD parcourent des podaires d'une même ellipse. En effet, soient O un point de ce plan et P son symétrique par rapport à EF. Le triangle OCD étant de forme invariable, il en est de même du triangle PAB ; donc le point P est fixe. Le milieu R de PQ étant situé sur EF, ce point décrit la podaire de P par rapport à l'ellipse ε, et la trajectoire de Q est une courbe homothétique à cette podaire. Celle-ci est aussi l'inverse d'une certaine conique η par rapport au point P; car, si l'on suppose le produit $PR.PR' = \lambda^2$, le lieu de R′ est la polaire réciproque de ε relativement au cercle décrit, de P comme centre, avec le rayon λ.

Ainsi, si un inverseur de Peaucellier a un sommet en P, un second en Q, le troisième sommet Q′, pendant la déformation du contreparallélogramme, décrit une conique (*).

Prenons pour axes de coordonnées la droite AB et la perpendiculaire au milieu O de AB. Si l'équation de ε est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

la tangente EF peut être représentée par

$$x\cos\omega+y\sin\omega=\sqrt{a^2\cos^2\omega+b^2\sin^2\omega},$$

ω étant l'angle de la normale en M avec l'axe des x.

Donc, si x_0, y_0 sont les coordonnées de P et ρ la distance PR, on a

$$\rho=x_0\cos\omega+y_0\sin\omega-\sqrt{a^2\cos^2\omega+b^2\sin^2\omega}.$$

Telle est aussi l'équation du lieu de R, si l'on adopte des coordonnées polaires ayant pour pôle P et pour axe polaire une parallèle à AB.

On aura l'équation du lieu de R′ en remplaçant ρ par $\frac{\lambda^2}{\rho}$:

$$\frac{\lambda^2}{\rho}=x_0\cos\omega+y_0\sin\omega-\sqrt{a^2\cos^2\omega+b^2\sin^2\omega};$$

en passant aux coordonnées cartésiennes, on trouve

$$a^2x^2+b^2y^2=(xx_0+yy_0-\lambda^2)^2.$$

En particulier, si P coïncide avec le milieu O de AB, la

(*) Q et Q′ sont deux sommets opposés du losange qui entre dans l'inverseur; P est le sommet où se réunissent les deux autres tiges de l'inverseur.

courbe décrite par R′ a pour équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \lambda^4;$$

c'est une ellipse ayant pour axes $2\frac{\lambda^2}{a}$, $2\frac{\lambda^2}{b}$.

Traçons dans un plan, invariablement lié à CD, une ellipse ε' ayant pour foyers les points C, D et dont le grand axe = AD; le mouvement de ce plan revient à faire rouler la courbe ε' sur ε.

Supposons la tige AD fixe; alors, pendant la déformation du contreparallélogramme, le point d'intersection M′ des tiges AB et CD décrit une hyperbole, et les points d'un plan invariablement lié à la tige BC parcourent des podaires d'une même hyperbole.

BACCALAURÉATS

BACCALAURÉAT CLASSIQUE (LETTRES-MATHÉMATIQUES)

(Paris, juillet 1893.)

(6 juillet). — I. *Problème obligatoire:*

Étant données trois droites parallèles A, B, C, et une perpendiculaire fixe PQ, variation de l'angle PRQ quand R se déplace sur la droite C. Maximum de cet angle.

II. *Trois questions à choisir:*

Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

Trouver sin $a/2$ et cos $a/2$ connaissant sin a.

Résoudre un triangle, connaissant a, b, A.

Physique.

I. *Problème obligatoire:*

L'objectif d'une lunette astronomique a été scié en deux par un plan contenant l'axe optique, et les deux moitiés peuvent être écartées perpendiculairement à l'axe d'une quantité quelconque a.

On pointe cette lunette sur un cercle lumineux de diamètre h, orienté parallèlement au plan des bords de l'objectif, puis on écarte les deux moitiés de l'objectif jusqu'à ce que les deux images (fournies chacune par l'une des moitiés) soient en contact.

Connaissant a, h et la distance focale f de l'objectif, déterminer la distance p de l'objet à la lunette.

II. *Trois questions à choisir:*

Induction par les aimants; loi de Lenz.

Principe des machines dynamo-électriques.

Bobine de Ruhmkorff.

BACCALAURÉAT COMPLET

Mathématiques. — Soient donnés deux cercles, de rayons a et b, tangents extérieurement. Trouver le rayon x d'un cercle tangent aux deux cercles donnés, d'après la condition que l'aire du triangle formé par les centres des trois cercles ait une valeur donnée m^2.

Étant donné tg a, trouver tg $a/2$. — Discussion. — Application au cas où a serait égal à 1860°. Quelle est alors la valeur de tg $a/2$?

Physique. — Une machine pneumatique est formé d'un seul corps de pompe d'une capacité d'un demi-litre, sans espace nuisible. On s'en sert pour faire le vide dans un récipient d'un litre de capacité primitivement plein d'air sec sous la pression de 76 centimètres de mercure.

On demande quelle sera la pression dans ce récipient après deux coups de piston?

Expérience d'Œrstedt. — Galvanomètre.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE (LETTRES-MATHÉMATIQUES)

I. *Problème obligatoire :*

Etudier la variation de la fraction rationnelle

$$y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 3}.$$

Construire la courbe qui représente la variation.

II. *Trois questions à choisir :*

Condition générale d'équilibre du levier.

Équilibre de la poulie mobile. — Moufles.

Condition d'équilibre du treuil. — Treuil des carriers.

QUESTION 346 (*)

Sur le diamètre AA′ *d'un cercle* O, *on construit un rectangle* AACC′ *ayant pour hauteur le côté du carré, inscrit au cercle; sur la circonférence, on prend un point quelconque* M, *et l'on tire les droites* MC, MC′, *qui coupent* AA′ *en* D *et* D′.

1° *Vérifier que* $\overline{AD'}^2 + \overline{A'D}^2 = \overline{AA'}^2$;

2° *On reporte les segments* AD′, A′D *sur la circonférence comme cordes, en tenant compte de leur sens, et l'on obtient sur la circonférence un nouveau point* M′ : *on demande d'étudier les variations de l'arc* MM′ *lorsque le point* M *parcourt la circonférence* O. (Dellac.)

(*) Nous n'avons pas reçu de solution de cette question. Celle que nous publions ici est celle que nous avait communiquée M. Dellac.

Pour deux positions du point M symétriques par rapport à BB′, les segments AD′, A′D ne font qu'échanger leurs valeurs. Cela conduit à prendre le point B pour origine des arcs qui déterminent la position du point M; mais nous prendrons, quand même, A pour point de départ du mobile M.

Posons $BM = \theta$, cet arc étant positif dans le sens trigonométrique.

On a $A'D = A'P + PD$. Or $A'P = R(1 - \sin\theta)$,

$$PD = \frac{CQ.MP}{MQ} = R\frac{(1 + \sin\theta)\cos\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}.$$

Donc $$A'D = R\left\{1 - \sin\theta + \frac{(1 + \sin\theta)\cos\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}\right\},$$

ou bien $$A'D = R\sqrt{2}\,\frac{1 + \sqrt{2}\cos\theta - \sin\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}.$$

De même $$AD' = R\sqrt{2}\,\frac{1 + \sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}.$$

Au moyen de ces formules, on vérifie aisément la première partie de l'énoncé.

Cette vérification étant faite, on voit que le triangle formé avec AA′ pour base et AD′, A′D pour côtés sera rectangle et aura son sommet M′ sur la circonférence.

Le segment A′D peut être reporté sur la circonférence soit au-dessus, soit au-dessous de AA′, mais le changement de sens ne peut avoir lieu que si ce segment devient nul. Nous conviendrons que, lorsque le point M passe par A′ et que le segment A′D devient nul, puis change de sens, on reportera le segment A′D, sur la circonférence, dans un sens contraire au précédent. Lorsque M, partant de A, parcourt l'arc ABA′, nous conviendrons de placer M′ du même côté.

Lorsque le point M passe en A′ et va au-dessous de AA′, le segment A′D s'annule et change de sens. Il était reporté précédemment au-dessus de AA′; il faudra maintenant le reporter en sens contraire, et par suite en-dessous de AA′. Ainsi le point M′ passe, comme M, au-dessous de AA′.

Il y a un certain nombre de cas où l'on voit immédiatement les positions relatives des points M, M′. Ils sont ensemble en A et A′, parce que l'un des segments est nul; ensemble au point B, parce que les deux segments sont égaux.

Enfin, lorsque M est en B′, le point M′ doit se trouver en B ou en B′.

Il est clair que deux positions du point M, symétriques par rapport à BB′, donnent deux positions de M′ symétriques aussi par rapport à BB′. Mais la réciproque n'est pas vraie, parce que, à une même position du point M′ correspondent généralement deux positions du point M. En effet, le point M′ étant donné, on connaît le segment AD′, par exemple, et le point M doit se trouver à l'un des points d'intersection de C′D′ avec la circonférence.

Mais le calcul est nécessaire pour l'étude complète des variations de l'arc MM′.

Posons $BM' = \theta'$, cet arc étant positif dans le sens trigonométrique, on a

$$A'M' = 2R \sin \frac{A'M'}{2} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta'}{2}\right)$$

$$AM' = 2R \sin \frac{AM'}{2} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta'}{2}\right).$$

En égalant ces valeurs à celles des segments A′D, AD′, on obtient

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}\cos\theta - \sin\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}.$$

Combinant par addition et soustraction, on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\frac{\theta'}{2} &= \frac{1 + \sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}, \\ \sin\frac{\theta'}{2} &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}. \end{aligned} \right.$$

L'arc $\frac{\theta'}{2}$ étant ainsi donné par son sinus et son cosinus se trouve complètement déterminé, de zéro à 2π; au delà la continuité suffit à le bien déterminer.

De là, on tire

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}.$$

Pour pouvoir mieux juger de la position relative des deux points M, M' cherchons l'arc $\frac{\theta-\theta'}{2}$. On a

$$\operatorname{tg}\frac{\theta-\theta'}{2} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\frac{1+\sqrt{2}\cos\theta - 2\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\sqrt{2}\cos\theta + 2\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

ou bien

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta-\theta'}{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)\cos\theta}.$$

On voit que l'arc $\theta-\theta'$ est nul pour $\theta=0$ et pour $\theta=\frac{\pi}{2}$. Dans l'intervalle il a donc passé par un maximum (*J. M. E.*, 1892, p. 224). Pour obtenir ce maximum, égalons à zéro la dérivée de la fonction; nous obtenons

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos\theta}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)\cos\theta}$$
$$+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot\frac{-\sin\theta\left\{2+\left(\sqrt{2}-1\right)\cos\theta\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\sin\theta\cos\theta}{\left\{2+\left(\sqrt{2}-1\right)\cos\theta\right\}^2}=0$$

ou bien :

$$\cos\theta\left\{2+\left(\sqrt{2}-1\right)\cos\theta\right\} - 4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta = 0,$$
$$2\cos\theta + \left(\sqrt{2}-1\right)\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 0,$$
$$\left(1+\sqrt{2}\right)\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0.$$

La racine négative de cette équation, étant plus petite que -1, doit être rejetée. On obtient donc la racine unique

$$\cos\theta_1 = 2-\sqrt{2};$$

ce qui donne pour l'arc deux valeurs égales et de signes contraires. On peut aisément les calculer en écrivant ainsi la formule :

$$\cos\theta_1 = \sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

On trouve $\theta_1 = \pm 54^\circ 8' 29'',17.$

La valeur maximum de l'arc $\frac{\theta-\theta'}{2}$ est donnée par la formule

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1-\theta_1'}{2}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^5}{(3-\sqrt{2})^3}},$$

ce qui donne

$$\theta_1-\theta_1'=6^\circ 19' 48'',04.$$

Cela posé, faisons mouvoir le point M sur la circonférence à partir de A.

Pour ce point, A on a $\theta = -90^\circ$; les deux points se trouvent ensemble au point A, comme nous le savions déjà.

Le point M′ prend les devants sur le point M, puisque l'arc $\theta-\theta'$ est d'abord négatif. Les deux points s'écartent l'un de l'autre jusqu'à la distance $6^\circ 19' 48'',04$ pour $\theta = -54^\circ 8' 29'',17$. Ensuite ils se rapprochent, et arrivent ensemble au point B.

De B en A′, on trouve pour les deux points M, M′ des positions symétriques des précédentes par rapport à BB′, de sorte que c'est M qui prend les devants, et les deux points arrivent ensemble en A′.

Lorsque M parcourt l'arc A′B′, $\operatorname{tg}\frac{\theta-\theta'}{2}$ est négatif. Donc l'arc $\theta-\theta'$ est négatif, θ' est plus grand que θ, et c'est le point M′ qui prend les devants. L'arc $\theta'-\theta$ va donc en croissant à partir de zéro, et il croît constamment, puisque au-dessous de AA′, il n'y a ni minimum ni maximum. Lorsque M arrive en B′, on a $\theta = 180^\circ$; par suite, $\operatorname{tg}\frac{\theta'-\theta}{2}=\infty$, et $\theta'-\theta=180^\circ$. Donc le point M′ a déjà parcouru l'arc A′B′AB, et se trouve en B, comme le faisait prévoir la construction géométrique.

Le point M′ a donc passé dans cet intervalle par les points B′ et A; cherchons les valeurs correspondantes de θ. Pour cela il est préférable de se servir de la formule (2).

Lorsque M′ se trouve en B′, on a $\theta' = 180^\circ$; donc $\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}=\infty$.

et par suite $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; d'où $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ou 135°.

Ainsi, le point M se trouvant au milieu de l'arc A′B′ le poit M′ arrive en B′. La construction géométrique le prouve. Quand

M′ se trouve en B′, les deux segments AD′, A′D sont égaux en valeur absolue, A′D étant négatif. Par suite, DD′ = AA′ = CC′. Donc les droites CD, C′D′ en se coupant au point M, forment deux triangles égaux, dont les hauteurs sont égales à $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$: le point M est donc au milieu de l'arc A′B′.

Lorsque M′ se trouve en A, $\theta' = 270° = \frac{3\pi}{2}$; donc $\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$.

La formule (2) donne alors

$$1 + \sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta = 0$$

d'où $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\theta = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$,

en rejetant la solution $\cos\theta = 0$ avec $\sin\theta = -1$, qui se rapporte au point A.

Cette valeur de θ se rapporte au point E où la droite AC′ coupe la circonférence. En effet, cherchons le sinus de l'arc BA′E, ou de son supplément B′E, ou de l'angle au centre B′OE qui est égal à OEF. On a sin OEF = cos EOF = cos 2.C′AA′. Or $\operatorname{tg} C'AA' = \frac{1}{\sqrt{2}}$; d'où l'on tire $\cos 2.C'AA' = \frac{1}{3}$ Par suite, on a bien $\sin BA'E = \frac{1}{3}$.

Ce point E est aussi le point de contact de la tangente issue du point C. En effet, si je désigne par E_1 le point de contact de celle-ci, l'angle ACE_1, est le double de l'angle ACO, dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et qui est égal, par suite, à l'angle A′AC′. Donc l'angle ACE_1 est égal à l'angle A′OE double de A′AC′. Mais l'angle $A'OE_1$ est aussi égal à ACE_1, comme ayant même supplément. Donc enfin l'angle A′OE, est égal à l'angle $A'OE_1$ et le point E_1 coïncide avec le point E.

Ces particularités pouvaient être prévues géométriquement. En effet, lorsque le point M′ est en A, le segment AD′ est nul; par suite, le point M se trouve sur la droite AC′. De plus, le segment A′D est alors égal à AA′, c'est-à-dire

maximum. Cette condition de maximum exige évidemment que le point M se trouve au point de contact de la tangente issue du point C.

Enfin, lorsque le point M va de B′ en A, et prend des positions symétriques de celles qu'il a prises dans le quadrant A′B′, le point M′ prend des positions symétriques de celles qu'il vient de prendre pendant ce temps. Il parcourt donc l'arc BA′B′A. Il se trouve au point A′ lorsque le point M se trouve en E′, symétrique de E et intersection de CA′ avec la circonférence, ou bien point de contact de la tangente issue de C′. Il se trouve en B′ lorsque le point M arrive au milieu de l'arc B′A. Lorsque M arrive en A, le point M′ y arrive aussi, après avoir fait un tour de plus que M.

En résumé, le point M′ tourne dans le même sens que le point M. Il se trouve en même temps que celui-ci au point de départ A, au point B et au point A′. Puis il va beaucoup plus vite que lui, et le rattrape en A, après avoir fait un tour de plus.

Si le point M fait encore un tour de circonférence, le point M′ reprend les mêmes positions relatives en conservant un tour d'avance, de sorte qu'il rejoint le point M au point A, avec deux tours d'avance; et ainsi de suite.

Remarque. — On pourrait donner au rectangle AA′CC′ une hauteur quelconque h, et chercher les variations de la somme $\overline{AD'}^2 + \overline{A'D}^2$. On trouve que dans le cas de $h = R\sqrt{2}$, elle reste constante (*).

(*) A propos de cette intéressante question, M. Brocard nous a adressé la notice bibliographique suivante :

La remarquable propriété des segments AD′, A′D a été signalée par l'illustre Fermat, au témoignage d'Euler, comme on pourra le voir dans une note de M. G. Dostor, insérée aux *N. A. M.* 1869, p. 558.

Cette proposition forme le sujet de la question 957 (*Ibid.* p. 479) dont une démonstration géométrique a été donnée, en 1870, successivement par MM. Bottiglia et Isaia, p. 41, Gerono, p. 43 et Lionnet p. 189.

Ce théorème a été, d'ailleurs, énoncé antérieurement dans le même recueil (*N. A. M.* 1858, p. 356).

QUESTION 464

Solution par M. C. GROLLEAU, répétiteur au lycée de Marseille.

Soient Γ, Γ′ *deux circonférences; la ligne des centres coupe* Γ *aux points* A, B, *et* Γ′ *aux points* A′, B′. *Ayant pris, sur une droite* Δ, *perpendiculaire à* AA′, *un point mobile* M, *les droites* MA, MA′ *coupent* Γ, Γ′ *respectivement aux points* C, C′. *Démontrer que la circonférence* MCC′ *passe par deux points fixes. En supposant que* Δ *soit l'axe radical des circonférences considérées, démontrer que les circonférences telles que* MCC′ *coupent orthogonalement* Γ, Γ′ ; *de sorte que les points fixes, signalés plus haut, sont, dans ce cas particulier, les points de Poncelet.* (Bienaymé.)

1° Soient D, D′ les points où la circonférence MCC′ rencontre la droite des centres, et K le point où cette ligne rencontre Δ. Nous allons démontrer que les points D, D′ sont fixes.

On a

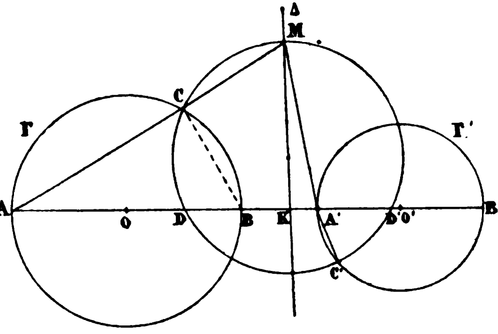
$$AD.AD' = AC.AM.$$

Traçons BC; le quadrilatère BCMK étant inscriptible, on a:

$$AC.AM = AB.AK;$$

d'où (1)

$$AD.AD' = 2R.AK.$$



On obtient, de même,

$$A'D'.A'D = 2r.A'K;$$

ce qu'on peut écrire $(AA' - AD)(AD' - AA') = 2r.A'K$;

d'où l'on tire, en tenant compte de (1),

$$(2) \qquad AD + AD' = \frac{2R\ AK + 2r.A'K}{AA'} + AA'.$$

Donc $\quad AD.AD' = C_1 \qquad AD + AD' = C_2,$

C_1, C_2 étant des quantités indépendantes de la position du point M sur Δ. AD, AD′ sont donc racines de l'équation du second degré $\quad X^2 - C_2X + C_1 = 0.$

Ce qui démontre que les points D, D′ sont fixes.

2° Δ étant l'axe radical des circonférences O, O′, on a :

$$AK.KB = A'K.KB',$$

ou $$AK(AK - 2R) = A'K(A'K + 2r)$$
ou encore
$$\overline{AK}^2 - \overline{A'K}^2 = 2R.AK + 2r.A'K. \quad (3)$$
Ceci posé, cherchons la puissance du point O, par rapport à la circonférence MCC'.

L'égalité (1) peut s'écrire
$$(R + OD)(R + OD') = 2R.AK;$$
d'où l'on tire
$$OD.OD' = 2R.AK - R^2 - R(OD + OD').$$
Or, l'égalité (2) donne
$$OD + OD' = \frac{2R.AK + 2r.A'K}{AA'} + AA' - 2R.$$
En portant cette valeur dans l'égalité précédente, on obtient
$$OD.OD' = R^2 + \frac{R(\overline{AK}^2 - \overline{A'K}^2) - R(2RAK + 2rA'K)}{AK + A'K};$$
ou, en tenant compte de (3),
$$OD.OD' = R^2.$$
La puissance du point O par rapport à la circonférence MCC' étant égale à R^2, les circonferences O et MCC' sont orthogonales.

On démontrerait de même que les circonférences O' et MCC' sont orthogonales, et que les points D, D' sont bien les points limites de Poncelet, dans ce cas particulier.

Nota. — MM. Sollertinsky et Droz-Farny nous ont aussi adressé deux élégantes solutions, basées sur la transformation par inversion.

QUESTION PROPOSÉE

522. — Trois cercles de centres A, B, C, et de rayons α, β, γ, sont tangents deux à deux *extérieurement ou intérieurement*. Si S, a, b, c désignent l'aire et les côtés du triangle ABC, σ l'aire du triangle formé par les trois points de contact, démontrer que l'on a
$$\frac{\sigma}{S} = 2\,\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}.$$
(M. d'Ocagne.)

Le Directeur Gérant,
G de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17776-8-93.

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$

ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. **A. Aubry.**

(*Suite*, voir page 171).

30. — Connaissant une valeur approchée $\frac{g}{G}$, on en aura deux autres, plus resserrées, de cette manière.

On a
$$\sqrt{q} = \frac{g}{G}\sqrt{\frac{qG^2}{g^2}} \gtrless \frac{g}{G}\,\frac{1 + 3\,\frac{qG^2}{g^2}}{3 + \frac{qG^2}{g}},$$

ou
$$\sqrt{q} \gtrless \frac{g(g^2 + 3qG^2)}{G(3g^2 + qG^2)} = \frac{h'}{H'};$$

et, par suite,
$$\sqrt{q} \lessgtr \frac{qH'}{h'}.$$

Soit $\frac{g}{G} = \frac{7}{5}$, on aura
$$\frac{1393}{985} < \sqrt{2} < \frac{1970}{1393}.$$

En prenant la demi-somme $\frac{3\,880\,899}{2\,744\,210}$ des deux limites, l'erreur sera en excès et plus petite que la demi-différence $\frac{1}{2\,744\,210}$, c'est-à-dire qu'on aura $\sqrt{2}$ avec six décimales exactes.

Cette méthode est donc incomparablement plus rapide que l'autre. On peut l'exposer ainsi : *Calculons successivement les valeurs*

$$a = 1 + 3q, \qquad A = 3 + q,$$
$$b' = a(a^2 + 3qA^2), \qquad B' = A(3a^2 + qA^2),$$
$$c' = b'(b'^2 + 3qB'^2), \qquad C' = B'(3b'^2 + qB'^2).$$
. . . .

Les rapports $\frac{a}{A}, \quad \frac{qA}{a}, \quad \frac{b}{B'}, \quad \frac{qB'}{b'}, \ldots$
oscillent rapidement autour de la valeur $\sqrt{q}$. En outre, *la demi-somme* $\frac{1}{2}\left(\frac{g'}{G'} + \frac{qG'}{g'}\right)$, *par exemple, est approchée par excès.*

Si l'on veut maintenant comparer les deux méthodes, on fera, dans les formules (10) du n° 25:

$$a = A = 5, \qquad b = A' = 7 \qquad x = \text{[illegible]},$$

et on verra que les première, deuxième, troisième, quatrième, ... fractions trouvées par la méthode du présent numéro, ne sont autres que les première, deuxième, quatrième, huitième, ... obtenues par le procédé du n° 25.

31. — Nous donnerons en terminant quelques propositions relatives aux approximations numériques.

Dans certaines applications, on remplace la racine $\sqrt[m]{1 + x}$ par l'expression fort simple $1 + \frac{m}{x}\cdot$ Il est bon de savoir apprécier l'erreur que l'on commet, sinon comme sens et valeur, au moins comme valeur, ce qui est souvent suffisant.

Le second membre de (2) peut s'écrire

$$1 + \frac{x}{m} - \frac{x^2}{m}\,\frac{m - 1}{2m - (m - 1)x}.$$

On a donc

$$1 + \frac{x}{m} > \sqrt[m]{1 + x} > 1 + \frac{x}{m} - \frac{x^2}{m}\,\frac{m - 1}{2m + (m - 1)x}.$$

Nous sommes assurés ainsi que l'erreur est en plus et inférieure à

$$(\alpha) \qquad \frac{x^2}{m}\,\frac{m - 1}{2m + (m - 1)x};$$

ou, en prenant la demi-somme et la demi-différence des deux limites, que

$$\sqrt[m]{1 + x} = 1 + \frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m}\,\frac{m - 1}{2m + (m - 1)x}$$

avec une erreur, en plus ou en moins, qui ne peut surpasser la quantité

$$\frac{x^2}{2m}\,\frac{m - 1}{2m + (m - 1)x}.$$

On remarquera que x étant toujours très petit, $(m-1)x$ est négligeable à côté de $2m$, et que, par suite, on n'augmentera pas beaucoup la limite (α) en la remplaçant par la quantité

$$x^2 \frac{m-1}{2m},$$

ce qui revient à écrire

$$\sqrt[m]{1+x} = 1 + \frac{x}{m} - x^2 \frac{m-1}{4m^2},$$

avec une erreur plus petite que $x^2 \dfrac{m-1}{4m^2}$.

32. — *Soient* A *et* B *deux nombres entiers ayant plus de la moitié de leurs chiffres à gauche communs : la différence de leurs racines* mes *est plus petite que* $\frac{1}{m}$.

Soit $A > B$. Le nombre des chiffres de $A - B$ est inférieur à la moitié de ceux de B et, *a fortiori*, le nombre des chiffres de $(A-B)^2$ est plus petit que celui des chiffres de B. On a donc

$$A - B < \sqrt{B}.$$

Or, le premier membre est supérieur à

$$m\sqrt[m]{B^{m-1}}(\sqrt[m]{A} - \sqrt[m]{B}) > m\sqrt{B}(\sqrt[m]{A} - \sqrt[m]{B})$$

et, *a fortiori*,

$$\sqrt[m]{A} - \sqrt{B} < \frac{1}{m}.$$

Ce théorème a été donné par Gergonne pour le cas de $m = 2$ (*Ann. de math.*, t. XX), et généralisé par Noël (*Corresp. math. et phys.*, t. VII).

Gergonne a aussi tiré de son théorème le corollaire suivant :

Les deux nombres A *et* B *ayant plus de la moitié de leurs chiffres à gauche communs, leur moyenne arithmétique surpasse leur moyenne géométrique de moins de* $\frac{1}{8}$.

En effet, on a

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} < \frac{1}{2}.$$

Élevant au carré et divisant par 2, il vient

$$\frac{A+B}{2} - \sqrt{AB} < \frac{1}{8}.$$

L'usage de ces théorèmes est facile à saisir, ainsi que leur extension aux nombres décimaux.

Changeons maintenant x en $\sqrt[m+h]{x}$ dans (β), il vient

$$\frac{x - 1}{x^{\frac{m+h}{m}} - 1} \gtrless \frac{m + h}{h}.$$

Ainsi, quel que soit le nombre positif $m < 1$, on a pour $x \gtrless 1$,

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} \gtrless mx^{m-1},$$

d'où, pour $x > 1$ et $m < 1$,

$$mx^{m-1} < \frac{x^m - 1}{x - 1} < m.$$

Changeant enfin x en $\frac{a}{b}$, a étant plus grand que b, on voit qu'on peut écrire

$$ma^{m-1} \gtrless \frac{a^m - b^m}{a - b} \gtrless mb^{m-1},$$

selon qu'on suppose $m > 1$, ou $m < 1$.

(A suivre.)

APPLICATION DE LA GÉOMÉTROGRAPHIE

A LA CONSTRUCTION DES QUATRE CERCLES I, I_A, I_B, I_C TANGENTS AUX TROIS COTÉS DU TRIANGLE ABC

Par M. **E. Bernès.**

La méthode qui me paraît la plus simple est fondée sur cette propriété peu remarquée : *Si* D *et* D′, E *et* E′ *sont les rencontres de* BC *avec les cercles* B(c), C(b), *les milieux* P, P′, P″, P‴, *de* DE, D′E′, DE′, D′E, *sont les points de contact de* BC *avec les quatre cercles* I, I_A, I_B, I_C.

De là cette construction : ρ étant un rayon arbitraire, après avoir tracé les cercles B(c), C(b), on trace les cinq cercles A(ρ), D(ρ), D′(ρ), E(ρ), E′(ρ) dont les intersections déterminent les deux bissectrices de l'angle B et les quatre perpendiculaires à BC en P, P′, P″, P‴ et par suite les quatre centres; il n'y a plus qu'à décrire I(IP), $I_A(I_AP')$, $I_B(I_BP'')$, $I_C(I_CP''')$. Le symbole est donc

$(2C_1 + C_3) \times 2 + (C_1 + C_3) \times 5 + (2R_1 + R_2) \times 6 + (2C_1 + C_3) \times 4,$
ou $17C_1 + 11C_3 + 12R_1 + 6R_2.$

Simplicité, 46; exactitude, 29.

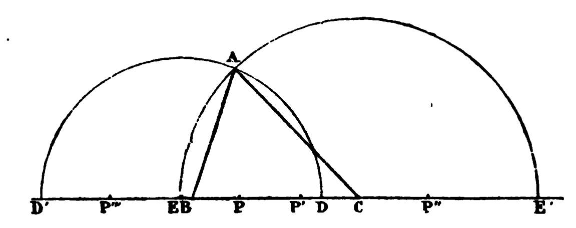
La même méthode, appliquée à la construction d'un seul des quatre cercles, exige
$(2C_1 + C_3) \times 2 + (C_1 + C_3) \times 3 + (2R_1 + R_2) \times 2 + 2C_1 + C_3,$
ou $9C_1 + 6C_3 + 4R_1 + 2R_2.$

Simplicité, 21; exactitude, 13.

La construction classique, appliquée avec toute l'économie dont elle est susceptible, donne pour résultats 27 et 16; et la méthode employée par M. Lemoine (*A. F.*, congrès de Pau), 23, 15.

Si l'on se proposait seulement de déterminer les quatre centres, sans tracer les cercles, la méthode précédente, qui a surtout en vue une détermination rapide des points de contact, ne conviendrait plus. On déterminerait, à la manière ordinaire, les quatre bissectrices des angles B et C, en ayant soin seulement de prendre a pour rayon commun des cercles que cette détermination exige. Le symbole serait $7C_1 + 6C_3 + 8R_1 + 4R_2$. Simplicité, 25 ; exactitude, 15.

On pourrait aussi déterminer les bissectrices en joignant B et C aux points où $A(b)$, $A(c)$, rencontrent la parallèle menée, par A, à BC. On procéderait dans cet ordre : $A(b), A(c), C(c), A(a)$, tracé de la parallèle, tracé des quatre bissectrices. Pour les deux pre-



miers cercles $3C_1 + 2C_3$, pour le troisième, $C_1 + C_3$ et pour le quatrième $2C_1 + C_3$; parce que la longueur a peut être relevée quand la pointe du compas est déjà en C. Le symbole serait donc $6C_1 + 4C_3 + 20R_1 + 5R_2$. Simplicité, 25 ; exactitude 16. Même simplicité qu'avant, et pourtant il y a une opération de moins, quatre cercles et cinq droites au lieu de six cercles et

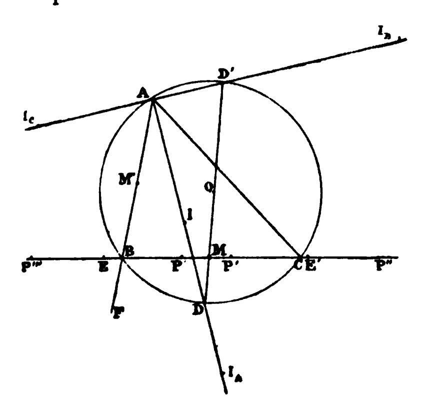
quatre droites. On arrive aux mêmes résultats en remplaçant les quatre cercles précédents par A (b), B (b), A (c), C (c), dont le second et le quatrième se coupent sur la parallèle menée de A à BC.

Construction simultanée des cinq cercles O, I, I_A, I_B, I_C.

Par $5C_1 + 4C_2 + 4R_1 + 2R_2$, on construit le cercle O ou cercle ABC. On a ainsi la médiatrice DD′ de BC qui rencontre le cercle O en D et D′. On trace AD, AD′. Les cercles D(DB), D′(D′B) déterminent sur ces droites les centres I, I_A, I_B, I_C. Jusque-là $9C_1 + 6C_3 + 8R_1 + 4R_2$. Pour déterminer les points de contact avec BC dont les distances à M, milieu de BC, sont $\frac{b-c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, on observera que, M″ étant le milieu de AB, on a :

$$MM'' = \frac{b}{2} \text{ et } AM'' = \frac{c}{2};$$

on trace M $\left(\frac{b}{2}\right)$ qui coupe BC en E et E′, et puis E $\left(\frac{c}{2}\right)$, E′ $\left(\frac{c}{2}\right)$ qui donnent P, P′, P″, P‴.



On peut alors décrire les quatre cercles I, I_A, I_B, I_C. On doit ajouter ainsi, au symbole déjà obtenu, $(2C_1 + C_3) + (3C_1 + C_3) + (C_1 + C_3) + (2C_1 + C_3) \times 4$ ou $14C_1 + 7C_3$. Le symbole de l'opération complète est donc $23C_1 + 13C_3 + 8R_1 + 4R_2$. Simplicité, 48; exactitude, 31. C'est presque aussi simple que la construction des quatre cercles I, I_A, I_B, I_C.

Si l'on n'avait à construire que les cercles O, I, I_A, il y aurait avantage à modifier un peu la détermination de P et P′; le cercle M″ $\left(\frac{b}{2}\right)$ coupe M″B en F, et BF étant égal à $\frac{b-c}{2}$, on tracerait M(BF).

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 179.)

284. — *On donne un cercle inscrit à un angle* A, *on mène à ce cercle une tangente variable coupant en* B′, C′ *les côtés de l'angle* A. *Lieu du point de Gergonne des triangles* AB′C′.

Soit BC une position quelconque de la droite mobile. Prenons le triangle ABC pour triangle de référence. Soient D, E, les points de contact du cercle inscrit avec les côtés de l'angle A, et

$$lx + my + nz = 0$$

l'équation de B′C′.

Les équations des droites B′D, C′E sont :

$$(1) \qquad lx \cos^2 \frac{A}{2} + my \cos^2 \frac{A}{2} - lz \cos^2 \frac{C}{2} = 0,$$

$$(2) \qquad lx \cos^2 \frac{A}{2} - ly \cos^2 \frac{B}{2} + nz \cos^2 \frac{A}{2} = 0.$$

Comme l'équation tangentielle du cercle inscrit est

$$(3) \qquad mn \cos^2 \frac{A}{2} + ln \cos^2 \frac{B}{2} + lm \cos^2 \frac{C}{2} = 0,$$

l'équation du lieu s'obtient en éliminant l, m, n entre (1) (2) (3); on trouve

$$\left(z \cos^2 \frac{C}{2} + y \cos^2 \frac{B}{2} - x \cos^2 \frac{A}{7}\right)^2 - yz \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} = 0,$$

ce qui représente une ellipse tangente en D et E aux côtés de l'angle A.

285. — *Soient un triangle* ABC *coupé par une transversale* A′B′C′, O_a, O_b, O_c, *les centres des circonférences circonscrites aux triangles :* AB′C′, BA′C′, CA′B′. *Démontrer que :*

1° Les cinq circonférences ABC, AB′C′, BA′C′, CA′B′, $O_a O_b O_c$ passent par un même point M.

2° Les triangles $O_aO_bO_c$, ABC sont égaux.

3° Les cinq points : O, O_a, O_b, O_c, M sont sur une même circonférence. (Voir *J. M. E.*, ex. n° 172.)

Soit toujours $lx + my + nz = 0$, l'équation de la transversale. Posons :

$$BA' = a_1 \qquad CB' = b_1 \qquad AC' = c_1$$
$$CA' = a_2 \qquad AB' = b_2 \qquad BC' = c_2$$

On a aisément, pour l'axe radical des cercles O et O_a, O et O_b, O et O_c

$$c_2 y + b_1 z = 0,$$
$$a_2 z + c_1 x = 0,$$
$$a_1 y + b_2 x = 0.$$

Ce qui montre, en tenant compte de la relation : $a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 = 0$, que les quatre premiers cercles considérés passent au même point M. Les coordonnées normales de ce point sont :

$$\frac{lx}{a}(cm - bn) = \frac{my}{b}(an - cl) = \frac{nz}{c}(bl - am).$$

On le démontre très élémentairement par la géométrie; ensuite, on établit l'égalité des triangles MAB, MO_aO_b, d'où l'on déduit $O_aO_b = AB$, l'égalité des triangles $O_aO_bO_c$; ABC, et la position du point M sur la circonférence $O_aO_bO_c$.

D'ailleurs, si on prend A'B'C, comme triangle fondamental, on voit facilement que la circonférence $O_aO_bO_c$, qui passe en M, contient aussi le point O.

BACCALAURÉATS

Académie de Grenoble.

(Nov. 1892.)

(1re série). — I. Mener une parallèle DE à la base BC d'un triangle ABC, de façon que l'aire du trapèze DECB qui en résulte soit moyenne proportionnelle entre l'aire du triangle donné ABC et celle du triangle ADE formé par cette parallèle. — Nombre des solutions. — Construction des solutions.

II. Angles de deux plans définis par leurs traces sur les plans de projection. — Cas général. — Cas particulier où l'un des plans est parallèle à la ligne de terre. — On énoncera tous les théorèmes de géométrie sur lesquels on s'appuiera.

(2e série). — Deux cercles O et O', de rayons R et R', sont extérieurs l'une à l'autre, et leurs tangentes communes intérieures font un angle de 60°. 1° On demande le rapport des longueurs des tangentes communes extérieure et intérieures AB et AE comprises entre les points de contact; 2° R étant donné, déterminer R' de façon que le rapport soit un maximum ou un minimum.

II. Déterminer l'angle de deux droites qui se coupent et dont on donne les projections.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles la fraction

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{4x^2 - 16x + 7}$$

est positive ; et, parmi ces valeurs, celles pour lesquelles elle est supérieure à l'unité.

II. *Questions à choisir :*

1° Calcul des bissectrices des angles d'un triangle, connaissant les trois côtés de ce triangle;

2° Lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est constant et égal à une quantité donnée;

3° Division d'une droite en moyenne et extrême raison. Construction et calcul des segments.

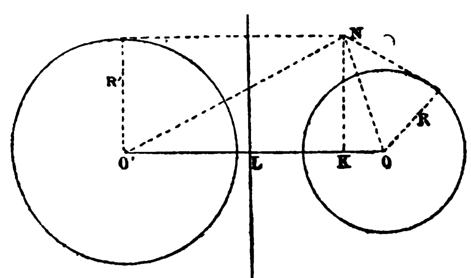
QUESTION 449

Solution par M. B. SOLLERTINSKY.

1° Si, sur AB, *on prend deux points* D, D′ *et sur* AC *deux autres points quelconques* E, E′, *dans quel rapport l'axe radical* Δ *des circonférences* BEE′, CDD′ *divise-t-il* BC *et dans quel rapport divise-t-il la médiane* AM?

2° Montrer que si B′ *divise* CA *dans un rapport représenté en grandeur et signe par* $\frac{\text{CE}.\text{CE}'}{\text{AE}.\text{AE}'}$, *et si* C′ *divise* BA *dans le rapport* $\frac{\text{BD}.\text{BD}'}{\text{AD}.\text{AD}'}$, *le même axe radical passe par la rencontre de* BB′ *et* CC′. (Bernès.)

Nous rappellerons d'abord la proposition suivante : *La différence des puissances d'un point* N, *par rapport aux cercles* O, O′, *est égale au double produit de la distance des centres par la distance de* N *à l'axe radical.*



En effet, K étant la projection de N sur OO′, et L l'intersection de OO′ avec l'axe radical, on aura

$$p-p'=(\overline{\text{NO}}^2-\overline{\text{R}}^2)-(\overline{\text{NO}'}^2-\overline{\text{R}'}^2)=(\overline{\text{OK}}^2-\overline{\text{O}'\text{K}}^2)-(\overline{\text{OL}}^2-\overline{\text{O}'\text{L}}^2)$$
$$=\text{OO}'[(\text{OK}-\text{OL})+(\text{O}'\text{K}-\text{O}'\text{L})]=2\text{OO}'.\text{LK}=2\text{O}'\text{O}.\text{KL}.$$

1° Soient P, Q, R, S les points où l'axe radical des circonférences BEE′, CDD′ rencontre les côtés de ABC et la médiane AM.

D'après la proposition établie, les distances u, v, w des points A, B, C, à l'axe radical, sont, respectivement,

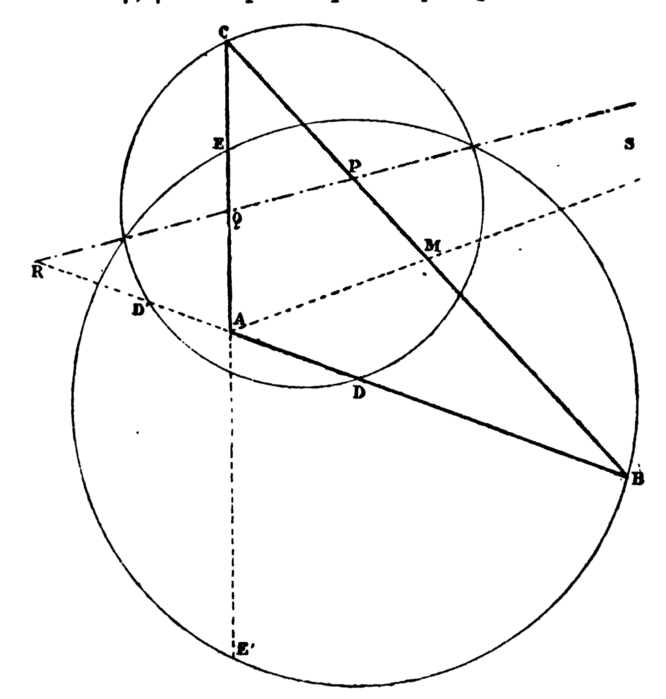
$$(1)\quad u=\frac{\text{AE}.\text{AE}'-\text{AD}.\text{AD}'}{2\text{O}'\text{O}},\quad v=\frac{-\text{BD}.\text{BD}'}{2\text{O}'\text{O}},\quad w=\frac{\text{CE}.\text{CE}'}{2\text{O}'\text{O}}.$$

Ainsi la distance du point M à l'axe est $\frac{-BD.BD'+CE.CE'}{4O'O}$;

par suite,

$$\frac{PB}{PC} = -\frac{BD.BD'}{CE.CE'}; \quad \frac{SA}{SM} = \frac{2(AE.AE' - AD.AD')}{CE.CE' - BD.BD'}.$$

2° Soient β, γ deux points quelconques pris sur les droites



AC, AB. Pour que les droites $B\beta$, $C\gamma$ se rencontrent sur l'axe radical QR, il faut et il suffit qu'on ait

$$(CAQ\beta) = (\gamma ARB),$$

ou

$$(CAQ\beta) + (BAR\gamma) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{QC}{QA}\cdot\frac{\beta A}{\beta C}\cdot + \frac{RB}{RA}\cdot\frac{\gamma A}{\beta B} = 1.$$

D'après les formules (1) cette égalité devient

$$CE.CE'\frac{\beta A}{\beta C} - BD.BD'\frac{\gamma A}{\gamma B} = AE.AE' - AD.AD',$$

Cette égalité étant vérifiée en supposant β et γ confondus respectivement avec B′, C′, on voit que BB′, CC′ concourent sur QR.

QUESTION 470

Solution par B. SOLLERTINSKY.

Les points qui sont situés au tiers de chaque hauteur d'un triangle T, *à partir de la base correspondante, forment un triangle* T′, *semblable à* T.

Si, du triangle T′, *on déduit, de même, le triangle* T″; *puis, du triangle* T″, *le triangle* T‴, *etc...; les triangles* T, T′, T″, T‴... *même point de Lemoine.*

Ces divers triangles sont d'ailleurs, **de deux en deux**, *homothétiques par rapport à ce point de Lemoine, point commun à ces triangles.* (d'Ocagne.)

Les deux premières parties de la question sont déjà connues (voir les développements de *M. Neuberg* à propos de la q. 548, *M.* 1890, pp. 166-169), et la dernière partie en est une conséquence immédiate. Voici d'ailleurs une solution de la question.

Soient B′, C′, les pieds des hauteurs BB′, CC′ d'un triangle ABC; A_1 le symétrique de A par rapport à BC.

Évidemment, les triangles AB′C′, A_1BC sont directement semblables. Donc, les points A″, B″, C″ divisant les droites AA_1, B′B, C′C dans le rapport 1 : 2 forment un triangle semblable à AB′C′ et, par suite, symétriquement semblable à ABC : c'est le triangle T′.

Soient K, K′, K_1 les points de Lemoine des triangles ABC. AB′C′, A_1BC. On sait que le point K est au milieu de la distance de K′ à BC. Le point K qui divise ainsi la droite K′K_1 dans le rapport 1 : 2 est donc le point de Lemoine de A″B″C″; il est le point double des triangles T, T′.

Soient δ, δ' les droites doubles de ces triangles. Ces droites étant autohomologues dans T, T′, elles le sont aussi dans T′, T″, et par suite dans T, T″. Donc les triangles T, T″, directement semblables et ayant de plus les droites doubles δ, δ', doivent être homothétiques par rapport à leur point double K.

QUESTION 471

Solution et remarques par E. Lemoine.

L'inverse ν_0 *du point de Nagel se trouve sur la droite qui joint le centre* O *du cercle circonscrit au centre* I *du cercle inscrit.*

(A. Droz).

La droite OI a pour équation (en coordonnées normales)

$$(1)\qquad \sum (b-c)(p-a)x = o.$$

Le point ν_0, l'inverse du point de *Nagel*, a pour coordonnées

$$\frac{a}{p-a},\quad \frac{b}{p-b},\quad \frac{c}{-c}.$$

En substituant ces valeurs dans (1) on a $\sum (b-c)a \equiv o.$

C. Q. F. D.

Remarques. — Comme dans la plupart des questions relatives à la géométrie du triangle, la *transformation continue* s'applique *immédiatement* à la question 471 et donne de nouvelles propriétés (voir *J. E.* 1892, p. 62). Appelons o, o_a, o_b, o_c les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle, O le centre du cercle circonscrit; μ, μ^a etc., l'inverse du point de *Nagel* et ses transformés continus en A, etc., etc., qui ont pour coordonnées normales

$$\frac{a}{p-a},\quad \frac{b}{p-b},\quad \frac{c}{p-c};$$

$$\frac{a}{p},\quad \frac{b}{p-c},\quad \frac{c}{p-b};\ \text{etc.}$$

La proposition de M. A. *Droz* devient:

Le transformé continu en A *de l'inverse du point de Nagel est sur la droite* Oo_a.

On peut voir que l'on a $\frac{O\mu}{o\mu} = \frac{R}{r}$. On en conclut, par transformation continue en A,

$$\frac{O\mu_a}{o_a\mu_a} = -\frac{R}{r_a}.$$

Soient d, d_a, ... les distances oO, o_aO ....

on a $$o\mu = \frac{dr}{R+r}, \qquad O\mu = \frac{dR}{R+r}$$

On en conclut, par transformation continue en A :

$$o_a\mu_a = \frac{d_a r_a}{R - r_a}, \qquad O\mu_a = \frac{d_a R}{R - r_a}.$$

Puisque nous parlons ici de la transformation continue, nous ferons observer qu'elle s'applique à un *très* grand nombre des énoncés fort intéressants donnés par M. *Boutin*, depuis longtemps, sous le titre d'*exercices divers ;* ainsi, dans les *exercices divers* des pages 19 et 20, J. E. 1893, elle donne de nouvelles propositions, si on l'applique aux numéros 242, 244, 245.

Seconde solution par M. A. POULAIN, à Angers.

Je vais prouver, en même temps, que cet alignement ν_0OI contient l'inverse Γ_0 du point de Gergonne $\Gamma\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \ldots\right)$, et le point $P\left(\sin^2\frac{A}{2}, \ldots\right)$

En effet, les inverses ν_0, Γ_0 de ν et Γ sont $\left(a^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \ldots\right)$, $\left(a^2\cot\frac{A}{2}, \ldots\right)$ ou $\left(a\sin^2\frac{A}{2}, \ldots\right)$ et $\left(a\cos^2\frac{A}{2}, \ldots\right)$.

Dans les identités

$$\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A, \qquad \cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A,$$

multiplions les deux membres par a, il vient de nouvelles identités qui établissent le théorème pour I, O, ν_0, Γ_0.

D'autre part, on sait que le centre de gravité G forme un alignement avec le cosinusien $I'(\cos A, \ldots)$ et Γ, puisque les identités précédentes montrent que GI' contient $P'\left(\cos^2\frac{A}{2}, \ldots\right)$(*), complémentaire de Γ. En prenant les

(*) Les points P et P' ont été été étudiés par M. Lemoine. Ils ont pour coordonnées normales $\frac{1}{p-a}, \ldots$ et $p - a, \ldots$

sinusiens des trois premiers points (c'est-à-dire en multipliant chaque première coordonnée par a, etc.); on trouve l'alignement IOP, qui complète le précédent.

On peut trouver un autre alignement pour Γ_0. Car ν, étant l'anticomplémentaire de I, se trouve sur GI. Si l'on prend les seconds sinusiens de ces points, on trouve Γ_0, K et le point $(a^4 \ldots.)$; K étant le point de Lemoine.

Une méthode analogue montre que ν_0, K et $(a^3, \ldots)$ sont en ligne droite. Car P′ est sur IK, comme le montrent ses coordonnées normales.

M. Boutin a montré (J. E. 1891, p. 225) que P′ se trouve sur les droites joignant I_a,... aux milieux des côtés correspondants. En prenant les sinusiens, on voit que Γ_0 est sur les droites joignant K_a au pied des symédianes.

En transformant I, P, O, ν_0, Γ_a par points connexes (J. E. 1892, p, 113), de manière que les angles A, B, C soient remplacés par $\pi - 2A, \ldots$, on obtient de nouveaux points en ligne droite :

$$O, \quad \left(\cos^2 \frac{A}{2}, \ldots\right), \quad (\sin 4A, \ldots), \quad (a \cos^3 A, \ldots), \quad \cos A \sin^3 A, \ldots).$$

NOTA. — Nous avons reçu de M. GROLLEAU, répétiteur au lycée de Marseille, une solution analogue à celle de M. Lemoine.

M. B. SOLLERTINSKY nous a écrit, à propos de cette question, pour nous faire observer que la solution qu'il a donnée de la question 390 renferme un théorème plus général.

Les inverses (isogonaux) *des huit points des groupes de Nagel et de Gergonne sont les centres de similitude des cercles inscrits au triangle de référence, relatifs au cercle circonscrit.*

QUESTION 472.

Solution par B. SOLLERTINSKY.

On donne une circonférence O, *une corde* AB *et une droite* xy *perpendiculaire à* AB. *On mène à ce cercle une tangente quelconque* ST, *qui rencontre* xy *en* S. *On décrit, de* S *comme centre, avec* ST *pour rayon, une circonférence qui coupe* AB *aux points* D, E.

1° Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle SDE *coupe la circonférence* O *sous un angle constant.*

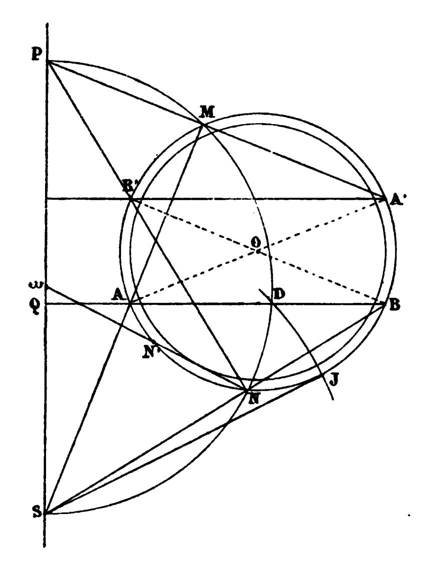
2° La construction précédente permet-elle de trouver toutes les circonférences qui, ayant leur centre sur xy, *coupent la circonférence* O *sous un angle donné?*

3° Construire celle de ces circonférences qui passe par un point donné ou qui a son centre en un point donné sur xy.

(Fouché.)

1° La circonférence SDE est l'inverse de la droite AB, le pôle d'inversion étant en S et la puissance étant égale à celle de S, par rapport au cercle O. Donc l'angle α des circonférences SDE, O est égal à celui de AB, O.

2° Soient A′, B′, les points diamétralement opposés à A, B sur la circonférence O. Toute circonférence Δ, ayant son centre sur xy et coupant sous l'angle α la circonférence donnée, soit de transformer par l'inversion dans l'une des cordes AB, A′B′, si l'on prend pour pôle l'une des rencontres de Δ avec xy. Donc, si l'on choisit convenablement le pôle d'inversion, toute circonférence Δ peut être trouvée par la construction indiquée, lorsque cette construction n'est pas en défaut, c'est-à-dire lorsque la tangente SJ est réelle et que la circonférence SJ rencontre AB en points réels. Mais dans tous les cas la construction suivante est préférable.



3° Étant donné le point S, soient M, N les rencontres de SA, SB avec la circonférence O; les droites MA′, NB′ concourent au point P sur xy tel que SA.SM = SB.SN = SP.SQ, Q étant l'intersection de AB avec xy. La circonférence SNMP ayant son centre au milieu ω de SP est l'une des circonfé-

rences cherchées. On trouvera l'autre par la construction analogue, appliquée à A'B'.

Soit δ la circonférence décrite de O avec le rayon $\frac{AB}{2}$.
Étant donné le centre ω de la circonférence Δ, pour trouver son rayon, on mène de ω la tangente à δ qui rencontre O en N, N'; les droites ωN, ωN' seront les rayons cherchés, car on a $\widehat{ON'N} = \widehat{ON\omega} = \alpha$.

QUESTION 473

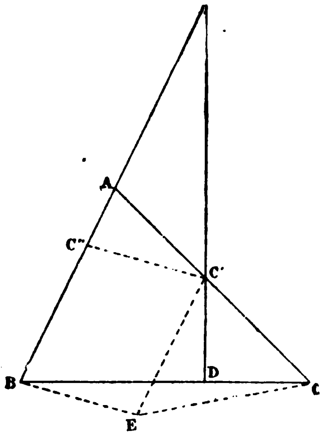
Solution par M. Aletrop, à Madrid.

On donne un triangle ABC; *mener à* BC *une perpendiculaire qui coupe* AC *en* C', AB *en* B', *de telle sorte que*

$$B'C' = B'B - C'C.$$

(Mannheim.)

Supposons le problème résolu : soit B'C'D, la perpendiculaire demandée.



Prenons sur B'B une longueur B'C" = B'C', et menons BE parallèle à C'C", E étant son point de rencontre avec la parallèle menée par C' à B'B.

$$\widehat{EBB'} = \widehat{C'C''B'}$$

$$= 90^\circ - \frac{\widehat{C'B'C''}}{2} = 45^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}.$$

D'un autre côté on voit facilement que

$$C''B = C'C, \qquad C''B = C'E;$$

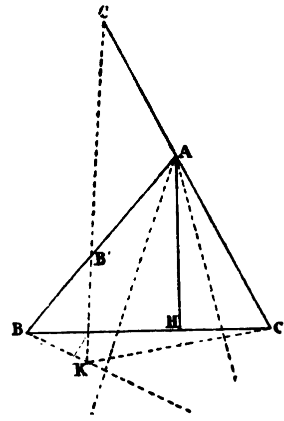
donc le triangle EC'C est isocèle, et l'on a :

$$\widehat{ECC'} = 90^\circ - \frac{\widehat{EC'C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Les angles EBB', ECC' étant connus, le point E reste déterminé; alors la construction s'achève d'après ce qui a été dit ci-dessus.

Seconde solution par M. Youssoufian, à Constantinople.

Je mène la hauteur AH, les bissectrices des angles qu'elle forme avec AB, AC, et les perpendiculaires de B et C sur ces bissectrices. Ces perpendiculaires se rencontrent en K. La droite KC'B', perpendiculaire sur BC, est la droite cherchée.



En effet, le triangle HC'C est isocèle, puisque la bissectrice de l'angle C', étant parallèle à celle de l'angle HAC, est perpendiculaire sur la base KC. Le triangle BB'K est également isocèle, pour la même raison ; par suite,

$$KB' - KC' = B'C' = BB' - C'C.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Si l'on mène les deux autres perpendiculaires aux bases AB, AC jouissant de la même propriété, on peut démontrer facilement que ces trois droites passent par un même point.

Nota. — Solutions trigonométriques par MM. O. Mengel, professeur au collège de Calvi ; Verrières, élève au lycée Louis-le-Grand.

M. A. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy et M. E. Foucart, élève au lycée Michelet, nous ont envoyé une solution analogue à celle de M. Aletrop. M. Foucart observe qu'on peut généraliser la question en supposant que B'C' soit tracé parallèlement à une direction donnée.

Enfin, nous avons reçu de M. B. Sollertinsky une solution qui ne diffère, que par la forme, de celle de M. Youssoufian.

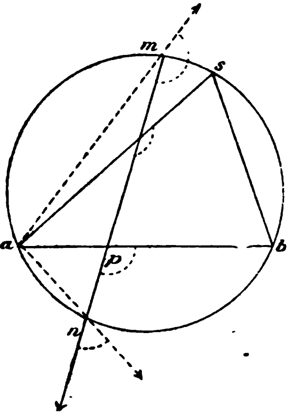
QUESTION 474.

Solution par M. E. Foucart, élève au lycée Michelet.

On donne un triangle isocèle asb *et la circonférence de cercle qui lui est circonscrite. On mène une transversale arbitraire, qui coupe la circonférence aux points* m, n *et la base* ab *au point* p. *Démontrer que la somme des angles que les droites* am, an, ap *font*

avec la direction mp *est égale à deux fois l'angle que* as *fait avec cette même direction.*


(Mannheim.)



Les angles considérés ont respectivement pour mesure

$$\frac{ms + sb + bn + ma}{2}, \quad \frac{ma}{2},$$
$$\frac{bn + ma}{2} \quad \frac{sb + bn + ma}{2}.$$

Il suffit donc de vérifier que

$$ms + sb + bn + ma + mn + ma + bn - 2(sb + bn + ma) = 0,$$

ou que

$$ms + ma - sb = sa - sb,$$

ce qui a lieu si le triangle *sab* est isocèle (*); la proposition est donc démontrée.

Nota. — Solutions analogues par MM. W. R. Thomas (B.-A.); Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

QUESTION 475

Solution par M. W. A. Thomas (B. A.).

Une droite, mobile autour du sommet A *du triangle* ABC, *rencontre en* D *la circonférence circonscrite et, en* E, *le côté* BC. *La circonférence* CDE *coupant* AC *au point* F *et* BF *au point* G :

1° *Démontrer que la droite* GE *passe par un point fixe* ;

2° *Trouver le lieu du point* G. (Ve F. Prime.)

1° Soit H le point où se coupent les droites EG, AB.

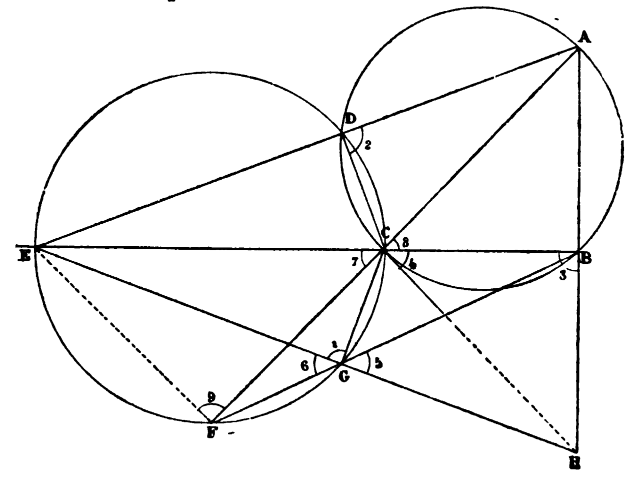
On a $\widehat{1} = \widehat{2} = \widehat{3}$.

Par conséquent, G, C, B, H sont *concycliques*.

(*) Dans la figure, le triangle *asb* est supposé quelconque.

Donc $\widehat{4} = \widehat{5} = \widehat{6} = \widehat{7} = \widehat{8}.$

Ainsi H est un point fixe.



2° Enfin, le lieu de G et la circonférence circonscrite au triangle BCH.

Nota. — Solutions analogues par MM. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille; A. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy; Bergman; Verrière, élève au lycée Louis-le-Grand.

M. A. Noyer, élève au collège Chaptal, dans la solution qu'il nous adresse, observe que $\widehat{9}$ étant égal à $\widehat{1}$, par suite à $\widehat{3}$, est un angle constant. Il en résulte que EF reste parallèle à une direction fixe.

QUESTION 476

Solution par M. A. Droz-Farny.

Étant donnés : un triangle ABC, *un point* P *dans son plan, un point* D *sur* BC, *mener par* P *une droite coupant* AB *en* F, AC *en* E, *de façon que* ED *et* DF *aient* CB *pour bissectrice d'un des angles que les droites forment entre elles.* (E. Lemoine.)

Élevons en D la perpendiculaire DG sur BC.

Les quatre droites D (BFGE) forment alors un faisceau harmonique.

Les deux droites BC et DG étant fixes, si DE tourne autour du point D, les deux rayons décrivent deux faisceaux projectifs concentriques.

Menons par P une transversale quelconque qui coupe AC en E et AB en F; la conjuguée harmonique de DE par rapport aux éléments fixes DB et DG rencontre AB en φ. Si la transversale tourne autour du point P, les points F et φ décriront sur AB deux ponctuelles projectives dont les points doubles joints à P fournissent les deux solutions possibles du problème.

Si D est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BC, il suffira de joindre le point P au conjugué harmonique D′ de D par rapport aux points B et C pour obtenir la seule solution possible dans ce cas.

Pour la construction des points doubles, voir : *Cremona-Dewulf. Géométrie projective.*

QUESTION 479

Solution par M. Ernest Foucart, élève au lycée Michelet.

On a

$$\frac{1+x}{1+x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \dots + \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2}$$
$$= \frac{x}{1-x}(1+x^n) + \frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{2n}) + \dots + \frac{x^n}{1-x^n}(1+x^{n^2}).$$

(Baschwitz.)

On vérifie facilement cette identité pour $n = 1$. Supposons cette formule vraie pour une valeur n; il suffit alors, pour en démontrer la généralité, de faire voir qu'elle est vraie quand on change n en $n+1$. Démontrons donc que

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \dots + \frac{1+x^n}{1-x^n}a^{n^2} + \frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}x^{(n+1)^2} \\ &= \frac{x}{1-x}(1+x^{n+1}) + \frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{2(n+1)}) + \\ &\quad \dots + \frac{x^n}{1-x^n}(1+x^{n(n+1)}) + \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}(1+x^{(n+1)^2}. \end{aligned}\right.$$

Elle sera démontrée si, en retranchant l'identité donnée de (2), membre à membre, on prouve que

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}x^{(n+1)^2}=\frac{x}{1-x}(x^{n+1}-x^n)+\frac{x^2}{1-x^2}(x^{2(n+1)}-x^{2n})+\ldots\\&\qquad+\frac{x^n}{1-x^n}[x^{n(n+1)}-x^{2n}]+\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}[1+x^{(n+1)^2}].\end{aligned}\right.$$

Le second membre de (3) peut s'écrire en développant

$$\underline{-x^{n+1}-x^{2(n+1)}-x^{3(n+1)}-\ldots-x^{n(n+1)}}+\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}[1+x^{(n+1)_2}].$$

La première partie est la somme des n termes d'une progression géométrique. Le second membre de (3) devient alors

$$\frac{-(x^{n+1})[x^{n(n+1)}-x]}{x^{n+1}-1}+\frac{x^{n+1}[1+x^{(n+1)^2}]}{1-x^{n+1}},$$

ou en effectuant $$\frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}x^{(n+1)^2}.$$

C'est la valeur du premier membre de (3). L'identité en question se trouve donc établie.

QUESTIONS PROPOSÉES

523. — Étant donné un triangle ABC; sur AB, on prend deux points isotomiques D, D', et sur AC deux points isotomiques E, E'. Démontrer que l'axe radical des circonférences BEE', CDD' coïncide avec la droite qui joint le pied de l'antimédiane issue de A au point symétrique de A relativement au milieu de BC. — *Plus généralement,* si DE, D'E' sont des parallèles quelconques à BC, l'axe radical des circonférences BEE', CDD' passe toujours par le pied de la symédiane et il détermine sur la médiane AM un point P défini par $\frac{2PM}{PA}=\frac{BD.CD'}{AD.AD'}$ (les longueurs étant prises en grandeur et en signe).

(Bernès.)

524. — Les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère ABCD sont divisés aux points A′, B′, C′, D′ en moyenne et extrême raison. 1° Démontrer que les quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ ont même centre de moyennes distances.

2° Étant donnés les points A′, B′, C′, D′, construire le quadrilatère ABCD. *(B. Sollertinsky.)*

525. — On donne un triangle rectangle isocèle ASB et une circonférence, tangente aux côtés SA, SB, qui a pour centre le milieu de l'hypoténuse AB. On mène à cette circonférence une tangente qui coupe AS, au point C ; BS, au point E : démontrer que le produit $AC \times BE$ est constant, quand la tangente CE varie de position. *(Mannheim.)*

526. — Étant donnée une sphère O inscrite à un trièdre S, si, par le point fixe P situé sur la droite SO et laissant O et S du même côté, on mène un plan tangent quelconque à la sphère, la somme des inverses des segments déterminés par ce plan sur les arêtes à partir du sommet est constante.

(Lauvernay.)

527. — Soit O le centre du cercle inscrit au triangle ABC; on projette ce point sur les perpendiculaires élevées au côté du triangle, en leurs points milieux. On obtient ainsi trois points A′, B′, C′. Démontrer que les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point D.

Ce point D est le réciproque du point de Gergonne.

(G. L.)

ERRATUM. — P. 206; l. 3 et 5, la lettre O doit être remplacée par Q.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20114-9-93.

SUR LA DOUBLE INÉGALITÉ $ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}$ ET SUR SES APPLICATIONS

Par M. A. Aubry.

(*Suite* et *fin*, voir page 217.)

NOTE II. — SUR L'EXTRACTION DES RACINES DE DEGRÉ QUELCONQUE.

35. — On sait que, selon qu'elle est supérieure ou inférieure à l'unité, on diminue ou on augmente la valeur d'une fraction en ajoutant une même quantité positive à ses deux termes. On a, d'après cela:

$$\frac{1 \pm a}{1 \mp a}\,\frac{1 \pm b}{1 \mp b} = \frac{1 \pm (a+b) + ab}{1 \mp (a+b) + ab} \lessgtr \frac{1 \pm (a+b)}{1 \mp (a+b)}; \qquad (a + b < 1)$$

d'où, pour $a + b + \ldots + l < 1$:

$$\frac{1 \pm a}{1 \mp a}\,\frac{1 \pm b}{1 \mp b} \cdots \frac{1 \pm l}{1 \mp l} \lessgtr \frac{1 \pm (a + b + \ldots + l)}{1 \mp (a + b + \ldots + l)};$$

et, pour $ma < 1$, m entier,

$$(1) \qquad \left(\frac{1 \pm a}{1 \mp a}\right)^m \lessgtr \frac{1 \pm ma}{1 \mp ma}.$$

Changeant a en $\frac{a}{m}$, cette relation devient

$$(2) \qquad \sqrt[m]{\frac{1 \pm a}{1 \mp a}} \gtrless \frac{m \pm a}{m \mp a};$$

puis, en posant $a = \frac{x}{2 \pm x}$;

$$(3) \qquad \sqrt[m]{1 \pm x} \gtrless \frac{2m \pm (m + 1)x}{2m \mp (m - 1)x}$$

démontrée autrement au n° 23.

36. — Divisant l'une par l'autre les deux inégalites renfermées dans la relation (3), il vient

$$\sqrt[m]{\frac{1 + x}{1 - x}} > \frac{2m + (m + 1)x}{2m - (m + 1)x}\,\frac{2m - (m - 1)x}{2m + (m - 1)x}.$$

Changeant x en $\dfrac{x}{2+x}$, cette relation se transforme en

$$(4)\qquad \sqrt[m]{1+x} > \frac{4m+(3m+1)x}{4m+(3m-1)x}\,\frac{4m+(m+1)x}{4m+(m-1)x}.$$

Posant $x = \dfrac{y}{1-y}$ et changeant ensuite y en x, on trouve

$$(5)\qquad \sqrt[m]{1-x} < \frac{4m-(3m+1)x}{4m-(3m-1)x}\,\frac{4m-(m+1)x}{4m-(m-1)x}.$$

Divisons (4) par (5) et changeons x en $\dfrac{x}{2+x}$; nous obtiendrons, en posant ensuite $x = \dfrac{y}{1-y}$ et changeant y en x:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt[m]{1\pm x} \gtrless \frac{8m\pm(7m+1)x}{8m\pm(7m-1)x}\,\frac{8m\pm(5m+1)x}{8m\pm(5m-1)x} \\ \frac{8m\pm(3m+1)x}{8m\pm(3m-1)x}\,\frac{8m\pm(m+1)x}{8m\pm(m-1)x} \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

37. — On a ainsi des valeurs de $\sqrt[m]{1\pm x}$, qui sont de plus en plus approchées. Nous allons faire voir qu'on a en effet

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2m\pm(m+1)x}{2m\pm(m-1)x} \lessgtr \frac{4m\pm(3m+1)x}{4m\pm(3m-1)x}\,\frac{4m\pm(m+1)x}{4m\pm(m-1)x} \lessgtr \\ &\frac{8m\pm(7m+1)x}{8m\pm(7m-1)x}\,\frac{8m\pm(5m+1)x}{8m\pm(5m-1)x}\,\frac{8m\pm(3m+1)x}{8m\pm(3m-1)x} \\ &\frac{8m\pm(m+1)x}{8m\pm(m-1)x} \lessgtr \cdots \lessgtr \sqrt{1\pm x}. \end{aligned}\right.$$

Or on a en général

$$\frac{A\pm 2x}{A\mp 2x} \lessgtr \frac{A\pm(m+1)x}{A\pm(m-1)x}\,\frac{A\mp(m-1)x}{A\mp(m+1)x}.$$

Posons $A = 4m \pm 2mx$, on a la première inégalité.

Posons $A = 8m \pm 2mx$, puis $A = 8m \pm 6mx$ et multiplions les deux relations; nous trouvons la seconde inégalité proposée.

Posons successivement $A = 16m \pm 2mx$, $A = 16m \pm 6mx$, $A = 16m \pm 10mx$, $A = 16m \pm 14mx$, et multiplions, il s'ensuit la troisième.

Et ainsi de suite.

38. — On n'a ainsi que des approximations dans un seul sens. Il est facile d'en obtenir de sens contraire. Considérons en effet les deux fonctions de m

$$\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^m, \qquad \frac{1+ma}{1-ma}.$$

Si m croît arithmétiquement, la première croît géométriquement et la seconde plus rapidement qu'une progression géométrique, puisqu'on a

$$\left(\frac{1+ma}{1-ma}\right)^2 < \frac{1+(m+h)a}{1-(m+h)a}\,\frac{1+(m-h)a}{1-(m-h)a}.$$

Or, pour $m = 1$, les deux fonctions ont même valeur, et pour une valeur entière quelconque de m, supérieure à 1, la première a une valeur supérieure à celle de la seconde. On conclut de là que, pour $m \gtrless 1$, on a

$$\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^m \lessgtr \frac{1+am}{1-am};$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^m \gtrless \frac{1-am}{1+am}.$$

La relation (1) et toutes celles qui la suivent se trouvent donc étendues à une valeur positive quelconque de m, en changeant les signes $<$ et $>$, en $>$ et $<$, si m surpasse 1.

39.— Changeons m en $\dfrac{m}{m-1}$ dans (3), (4), (5), (6),... il viendra

$$(7) \qquad \sqrt[m]{1 \pm x} \lessgtr \frac{(2m \pm x)(1 \pm x)}{2m \pm (2m-1)x}.$$

. . . .

Cette relation (7) et la relation (3) appliquée à l'expression numérique $\sqrt[129]{1{,}0037}$ déjà traitée, donnent les approximations suivantes :

$$\frac{258 + 130.0{,}0037}{258 + 128.0{,}0037} < \sqrt[129]{1{,}0037} < \frac{258{,}00037.1{,}0037}{258 + 257.0{,}0037}$$

ou, tous calculs faits

$$1{,}00002862961 < \sqrt[12]{1{,}0037} < 1{,}00002862971.$$

On a ainsi la racine $1{,}000\,028\,629\,66$: l'erreur est inférieure à $0{,}000\,000\,000\,05$. On a donc neuf décimales exactes.

40. — Dans les relations (3) et (7) changeons x en $\frac{h}{a^m}$ et posons $A = a^m \pm h$; il vient

$$(8)\quad a\,\frac{(m-1)a^m + (m+1)A}{(m+1)a^m + (m-1)A} \lessgtr \sqrt[m]{A} \lessgtr a\,\frac{A}{a^m}\cdot\frac{A+(2m-1)a^m}{a^m+(2m-1)A}$$

suivant qu'on a $A \gtrless a^m$.

Cette formule perfectionne grandement celle de Lambert, qui ne donne que le premier membre comme valeur approchée de $\sqrt[m]{A}$, sans même indiquer le sens de l'erreur commise. En prenant la moyenne arithmétique des deux valeurs supérieure et inférieure, lesquelles sont fort approchées l'une de l'autre, on aura une approximation de $\sqrt[m]{A}$ dont on pourra facilement mesurer l'erreur, et qui serrera de très près si $\frac{A}{h}$ est une très petite fraction.

41. — Nous terminerons cette Note par l'indication de quelques méthodes proposées pour le même objet, et qui formeront d'utiles exercices.

Jean Bernoulli *(De seriebus varia)*, donne plusieurs moyens d'approcher de la valeur d'une racine par le calcul des termes d'une série.

Dans le tome Ier des *Annales de Mathématiques* de Gergonne, on trouve, sous la signature R. S., une méthode de ramener une division ou une extraction de racines à une division par 2, ou à l'extraction d'une racine carrée.

Les auteurs qui se sont occupés de l'extraction des racines des équations ont généralement appliqué leurs méthodes à celle des racines arithmétiques. Telles sont les méthodes de Budan, Fourier, Horner, Wronski, Brizard, etc. Mais ces méthodes, établies pour vaincre de grandes difficultés, sont, dans le cas particulier dont il s'agit, beaucoup trop longues, et nous nous en tiendrons à cette mention.

Dans les *Bulletins de l'Académie de Bruxelles* de 1842, Scharr a donné deux développements de $\sqrt[m]{A}$ en produits indéfinis en partant de certaines intégrales définies, qu'il traite de la manière employée par Euler pour démontrer

la formule de Wallis. Nous pensons que nos relations (3), (4), (5). (6), ... pourraient conduire d'une manière élémentaire aux formules de Scharr (*).

COMPARAISON DES RACINES
DE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Par M. C. Margerie.

Soient les équations

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$
$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

dans lesquelles nous supposons a et α positifs. x_1 et x_2 sont les racines de f, ξ_1 et ξ_2 celles de φ.

Si δ désigne le résultat de la substitution d'une racine de $f = 0$ dans le premier membre de φ, les équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma - \delta = 0,$$

ont une racine commune. On a donc

$$\big(a(\gamma - \delta) - c\alpha\big)^2 - (a\beta - b\alpha)\big(b(\gamma - \delta) - c\beta\big) = 0,$$

ou

(1) $$a^2\delta^2 - P\delta + R = 0;$$

en posant : $P = 2a(a\gamma - c\alpha) - b(a\beta - b\alpha)$,

et $R = (a\gamma - c\alpha)^2 - (a\beta - b\alpha)(b\gamma - c\beta)$.

Les racines δ_1 et δ_2 de l'équation (1) sont les résultats de la substitution de x_1 et x_2, dans le premier membre de φ.

En supposant que les deux équations proposées ont respectivement leurs racines réelles et inégales, nous pouvons dresser le tableau suivant : $(x_1 < x_2,\ \xi_1 < \xi_2)$.

$R = 0$ $\begin{cases} P \neq 0 & \text{les équations ont une seule racine commune,} \\ P = 0 & x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2. \end{cases}$

$$R < 0 \begin{cases} -\dfrac{b}{a} < -\dfrac{\beta}{\alpha} & x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2, \\ -\dfrac{b}{a} > -\dfrac{\beta}{\alpha} & \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2. \end{cases}$$

(*) Le présent travail a une suite. Elle sera publiée dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, auquel la nature des sujets qui y sont abordés le destine plus spécialement. *G. L.*

$$\mathrm{R} > 0 \begin{cases} \mathrm{P} > 0 \begin{cases} f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) > 0 \;\ldots\ldots\; & x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2. \\ f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) > 0 \begin{cases} -\dfrac{b}{a} < -\dfrac{\beta}{\alpha} & x_1 < x_2 < \xi_1 < \xi_2, \\ -\dfrac{b}{a} < -\dfrac{\beta}{\alpha} & \xi_1 < \xi_2 < x_1 < x_2. \end{cases} \end{cases} \\ \mathrm{P} < 0 \quad \xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2. \end{cases}$$

APPLICATION

Soit l'équation

(1) $f = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$

et l'équation dérivée

(2) $a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0.$

Pour que (1) ait ses racines réelles il faut et il suffit que les résultats de la substitution des racines de (2) dans (1) ou dans

$$\frac{1}{3} f'_y(x, y) = a_1x^2 + 2a_2x + a_3$$

soient de signes contraires ; par suite, $\mathrm{R} < 0$.

$$\mathrm{R} = (a_0a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2).$$

Si $\mathrm{R} = 0$, l'équation (1) a une racine double.

NOTE SUR LA SOMME DES TERMES

D'UNE PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

Par **M. G. Darzens.**

La nouvelle démonstration que nous donnons des formules relatives à la somme des termes d'une progression géométrique repose entièrement sur une représentation géométrique des termes d'une telle progression.

Portons, à partir de O, une longueur OA, égale au premier terme de la progression.

Au point A menons une droite AN inclinée à 45° sur l'axe OX; au point O menons une droite OM telle que

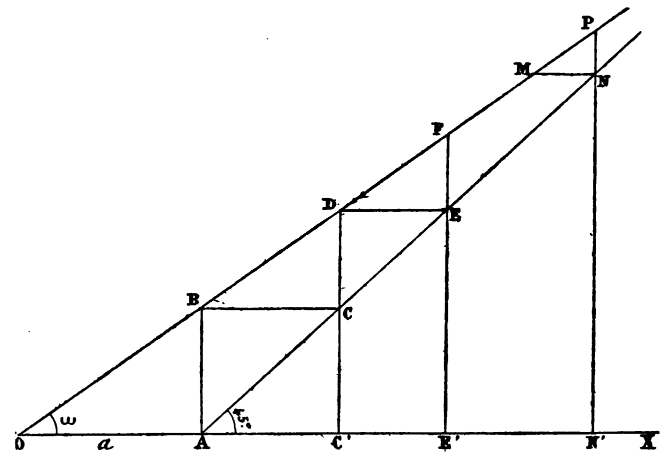
$$\mathrm{tg}\,\widehat{\mathrm{MOX}} = \mathrm{tg}\,\omega = q,$$

q étant la raison.

Cela posé, élevons en A une perpendiculaire AB. AB sera le second terme de la progression, car : on a :

$$AB = OA \operatorname{tg} \omega = aq.$$

Si nous menons la parallèle BC à l'axe OX, il est facile



de voir que BC sera encore le second terme de la progression.

Enfin, si l'on abaisse la perpendiculaire CC′, OC′ sera la somme des deux premiers termes.

On verra de même que CD ou son égal DE sera le troisième terme et OE′ la somme des trois premiers termes, etc., etc.

Soit MN le $n^{\text{ième}}$ terme de la progression; ON′ sera la somme de n premiers termes et NP sera le $n + 1^{\text{ième}}$ terme.

Dans le triangle OPN′ : on a

$$PN' = ON' \operatorname{tg} \omega = ON' \times q.$$

Mais $\qquad N'P = N'N + NP = S - a + aq^n;$

donc $\qquad S - a + aq^n = Sq;$

d'ou l'on déduit la formule bien connue :

$$S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Cette démonstration devient très intéressante lorsque q est plus petit que 1, car elle permet alors de voir instantanément que la progression forme une série convergente.

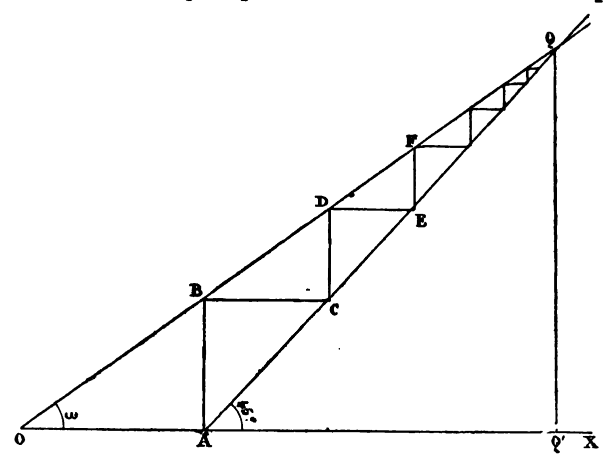
En effet, lorsque q est plus petit que 1, ω est plus petit que 45° et les deux droites ON, OM se coupent en un point Q.

Il est clair alors que la série des marches d'escalier mène nécessairement au point Q, et que la somme est finie et égale à OQ'.

On a d'ailleurs : $QQ' = OQ' \operatorname{tg} \omega$,

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

Au contraire, lorsque $q \geqslant 1$, les deux droites sont paral-



lèles ou ne se rencontrent pas au-dessus de OX. Dans les deux cas, la série des marches d'escalier mène à l'infini, et la progression a une somme infinie.

Enfin, on peut déduire facilement de cette considération géométrique, que q^n tend vers zéro ou augmente au delà de toutes limites, suivant que q est plus petit ou plus grand que 1.

PROBLÈME

par M. **Léon Vautré**, professeur au séminaire d'Autrey (Vosges.)

A un polygone régulier convexe, de n *côtés, inscrire un polygone convexe, dont les* n *angles soient égaux, l'un des sommets étant donné.*

Suivant que n *est pair ou impair, la solution est double ou unique.*

Étudier la manière dont varient l'aire et le périmètre de chacun de ces polygones inscrits, quand on déplace le sommet donné.

Soient AB ... MN le polygone proposé, A′ le sommet donné sur le côté AB, A′B′ ... M′N′ le polygone inscrit demandé, les lettres étant placées, dans le même sens, aux sommets des deux polygones considérés.

Posons

$AB = a$, $AA' = b$, $BB' = x_1$, $CC' = x_2, \ldots$, $NN' = x_{n-1}$.

I. — Les triangles semblables A′BB′, B′CC′,..., M′NN, donnent :

$$\frac{x_1}{a-b} = \frac{x_2}{a-x_1} = \ldots = \frac{x_p}{a-x_{p-1}} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{a-x_{n-2}} = \frac{b}{a-x_{n-1}},$$

d'où, en désignant par λ la valeur commune de ces rapports :

$$\begin{array}{l} x_1 + \lambda b - a\lambda = 0, \\ x_2 + \lambda x_1 - a\lambda = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p + \lambda x_{p-1} - a\lambda = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + \lambda x_{n-2} - a\lambda = 0, \\ b + \lambda x_{n-1} - a\lambda = 0, \end{array}$$

Additionnant ces équations, après les avoir multipliées respectivement par les facteurs $(-\lambda)^{n-1}$, $(-\lambda)^{n-2}$, ... $(-\lambda)$, 1, on obtient, si n est impair :

(1) $(\lambda^n + 1)b - a\lambda(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} + \ldots - \lambda + 1) = 0,$

ou

$$(1') \qquad (\lambda^n + 1)\left(b - \frac{a\lambda}{\lambda + 1}\right) = 0,$$

et si n est pair :

(2) $(\lambda^n - 1)b - a\lambda(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} + \ldots + \lambda - 1) = 0,$

ou

$$(2') \qquad (\lambda^n - 1)\left(b - \frac{a\lambda}{\lambda + 1}\right) = 0,$$

Examinons d'abord l'équation (1′). Elle admet la solution

$$\lambda' = \frac{b}{a-b},$$

et n'a pas d'autre solution réelle, car la valeur $\lambda = -1$, qui annule le premier facteur, rend le second infini, et ne satisfait à l'équation (1) que si l'on suppose $a = 0$.

A cette solution λ' correspond le système de valeurs :

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = b.$$

La même solution λ' convient à l'équation (2'), laquelle admet, en outre, une autre racine réelle, savoir

$$\lambda'' = 1,$$

à laquelle correspond le système de valeurs :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = a - b, \\ x_2 = x_4 = \ldots = x_{n-2} = b. \end{cases}$$

La solution λ' donne un polygone régulier P'; la solution λ'' donne un polygone P'', dont les côtés sont égaux deux à deux, et parallèles aux diagonales triangulaires du polygone donné.

Dans le cas où $b = \frac{a}{2}$, les deux polygones coïncident avec le polygone P_1 qui a pour sommets les milieux des côtés du polygone P.

II. — Supposons que le polygone P ait $2n$ côtés. Soit S sa surface, et soient S', S'' celles des polygones inscrits P', P''.

La partie du polygone P extérieure à P' se compose de $2n$ triangles égaux, qui ont pour côtés b et $(a - b)$, et $\frac{n-1}{n}\pi$ pour angle compris. On a donc :

$$(3) \qquad S' = S - nb(a - b)\sin\frac{n-1}{n}\pi.$$

On trouve de même :

$$(4) \qquad S'' = S - \frac{n}{2}[(a - b)^2 + b^2]\sin\frac{n-1}{n}\pi,$$

d'où $S' + S'' = 2S - \frac{n}{2}a^2 \sin\frac{n-1}{n}\pi.$

La somme $S' + S''$ est donc indépendante de la position du sommet A'; elle est, par conséquent, double de l'aire du polygone P_1. Si le sommet A' se déplace, on voit facilement, par la formule (3), que l'aire du polygone P_1 est le minimum de P', et, par conséquent, le maximum de P''.

III. — Les côtés du polygone P'' ont alternativement pour valeur $2b\sin\frac{n-1}{2n}\pi$ et $2(a - b)\sin\frac{n-1}{2n}\pi$; son périmètre a donc pour valeur la quantité constante $2na\sin\frac{n-1}{2n}\pi$.

Quant au polygone P′, comme il reste semblable à lui-même, son périmètre est minimum en même temps que sa surface, c'est-à-dire quand il se confond avec P_1, et, comme P_1 est une des formes de P″, il s'ensuit que le minimum du périmètre de P′ est égal à la valeur constante du périmètre de P″.

SUR UN PROBLÈME DE JEU

Par M. **A. Boutin.**

On joue aux courses dans les conditions suivantes (*) :

A la première course on prend un cheval de cote K_1, *sur lequel on place la somme* x_1; *si l'on perd, on prend, à la seconde course, un cheval de cote* K_2, *sur lequel on mise la somme* x_2; *si l'on perd on prend, à la troisième course, un cheval de cote* K_3, *sur lequel on mise* x_3, *etc. ... ; en supposant qu'on ait perdu dans les* $n-1$ *premières courses, on prend à la* n^e *un cheval de cote* K_n, *sur lequel on mise la somme* x_n. *On demande de calculer les mises :* x_1, x_2, ... x_n, *de manière à avoir le bénéfice* a_1 *après la première course, ou en cas de perte* a_2 *après la seconde, etc., ou, en cas de perte des* $n-1$ *premières courses,* a_n *après la* n^e?

Les équations du problème sont :

$$\begin{aligned}
&K_1x_1 = a_1 ,\\
&K_2x_2 - x_1 = a_2 ,\\
&K_3x_3 - x_2 - x_1 = a_3 ,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&K_mx_m - x_1 - x_2 - \ldots - x_{m-1} = a_m ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&K_nx_n - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} = a_n
\end{aligned}$$

On a ainsi n équations du 1er degré, à n inconnues, qui donnent :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a_1}{K_1},\\
x_2 &= \frac{a_2K_1 + a_1}{K_1K_2},\\
x_3 &= \frac{a_3K_1K_2 + a_2K_1 + a_1(1 + K_2)}{K_1K_2K_3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

(*) Voyez : *Journal* 1877, p. 110, une Note relative au « *Problème des courses* » envisageant le problème à un autre point de vue.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} = \frac{1}{K_1K_2K_3 \dots K_{m-1}}$$
$$\times \left[\begin{array}{l} a_{m-1}K_1K_2 \dots K_{m-2} + a_{m-2}K_1K_2 \dots K_{m-3}(1 + K_{m-1}) \\ + a_{m-p}K_1K_2 \dots K_{m-p-1}(1 + K_{m-p+1})(1 + K_{m-p+2}) \dots (1 + K_{m-1} \\ + \dots + a_1(1 + K_2)(1 + K_3) \dots (1 + K_{m-1}), \end{array}\right]$$

$$x_m = \frac{1}{K_1K_2 \dots K_m} \left[\begin{array}{l} a_mK_1K_2 \dots K_{m-1} + a_{m-1}K_1K_2 \dots K_{m-2} \\ + a_{m-2}K_1K_2K_3 \dots K_{m-3}(1 + K_{m-1}) + \dots \\ + a_{m-p}K_1K_2 \dots K_{m-p-1}(1 + K_{m-p+1})(1 + K_{m-p+2}) \\ \dots (1 + K_{m-1}) + \dots \\ + a_1(1 + K_2)(1 + K_3)(1 + K_4) \dots (1 + K_{m-1}) \end{array}\right]$$

Le problème est donc toujours possible, ce qui était évident *a priori*. Dans la pratique, on doit observer que si les nombres K_1, K_2, K_3, ... K_n sont petits, ce qui a lieu pour les favoris, les nombres x_n croissent très rapidement avec n.

Des formules précédentes qui sont très générales, on peut en tirer de particulières intéressantes. On peut supposer, par exèmple que le bénéfice a soit le même, quel que soit le rang de la course à laquelle on gagne; il suffit de faire :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a.$$

Ces mêmes formules peuvent s'appliquer également à d'autres jeux, comme la roulette.

Si l'on joue *pair* ou *impair*, *rouge* ou *noir*, *manque* ou *passe*,

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_n = 1$$

Si l'on joue la douzaine ou la colonne,

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_n = 2.$$

Si l'on joue le sixain,

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_n = 5.$$

Si l'on joue la rangée des trois numéros,

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_n = 11.$$

Si l'on joue le numéro plein,

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_n = 35.$$

Mais toujours, dans la pratique, x_n croît vite avec n, et le maximum de mise, imposé par la Banque, est vite atteint.

Dans les mêmes cas, on peut aussi imaginer un bénéfice a, indépendant du rang de sortie du numéro gagnant, il suffit de faire

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots a_n = a.$$

Voici les formules si on joue la douzaine, par exemple :

$$x_1 = \frac{a_1}{2},$$

$$x_2 = \frac{2a_2 + a_1}{4},$$

. . . . . .

$$2^n x_n = 2^{n-1}a_n + 2^{n-2}a_{n-1} + 2^{n-3}.3.a_{n-2} + 2^{n-4}.3^2.a_{n-3} + \ldots + 3^{n-2}a_1.$$

Si $$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a;$$

$$x_1 = \frac{a}{2},$$

$$x_2 = \frac{3a}{4},$$

. . . .

$$x_n = \frac{3^{n-1}a}{2^n};$$

progression arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.

Supposons $a = 1$ pièce, $x = 20$.

$$x_n = \frac{3^{19}}{2^{20}} = 1110 \text{ pièces environ.}$$

L'avance nécessaire pour gagner 1 pièce est

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3330 \text{ pièces au moins.}$$

Non seulement le maximum a été atteint avant le vingtième coup, mais on conçoit que, quand bien même le maximum n'existerait pas, l'importance de la perte obligerait à s'arrêter, et à repartir à nouveau.

L'hypothèse de la douzaine, sur laquelle on ponte, passant vingt fois, quoique peu probable, est cependant possible ; comme la probabilité de sortie d'une douzaine est $\frac{1}{3}$, la perte de 3330 pièces exige, en moyenne, $3330 \times 3 = 10000$ coups, environ, pour être rattrapée ; mais une pareille série de vingt coups défavorables, contre un favorable, peut se représenter au bout des 10000 coups, et absorber à nouveau le bénéfice acquis.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 179.)

286. — *Soient* $\frac{V}{2}, \frac{V'}{2}, \frac{V''}{2}$, *les angles sous lesquels on voit, respectivement, des sommets d'un triangle, la distance* IM *(*I, *centre du cercle inscrit;* M, *point quelconque). Démontrer la relation :*

$$\cot\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{V}{2} + \cot\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{V'}{2} + \cot\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{V''}{2} + \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{V}{2}\operatorname{tg}\frac{V'}{2}\operatorname{tg}\frac{V''}{2} = 0.$$

On trouve aisément, pour l'angle IAM, (x, y, z) étant les coordonnées normales de M,

$$\frac{y}{z} = \frac{\cot\frac{V}{2} - \cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{V}{2} + \cot\frac{A}{2}}.$$

Éliminant x, y, z entre cette équation et les deux autres analogues, on a la relation écrite plus haut.

C'est aussi la relation entre les angles V, V′, V″, sous lesquels la distance de deux points inverses est vue des sommets du triangle de référence.

287. — *Soient* M, P, *deux points quelconques,* V, V, V″, *les angles sous lesquels on voit* MP, *des sommets du triangle de référence; trouver la relation qui lie* V, V′, V″.

Soient x, y, z; x_1, y_1, z_1, les coordonnées normales de M et P. On a :

$$\operatorname{tg} V[zz_1 + yy_1 + \cos A(zy_1 + yz_1)] = \sin A)(zy_1 - yz_1)$$

et deux formules analogues pour V′ et V″.

La relation cherchée s'obtient en éliminant x_1, y_1, z_1 entre ces trois équations. On trouve :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & y\sin V + z\sin(V+A) & z\sin V + y\sin(V-A) \\ x\sin V' + z\sin(V'-B) & 0 & z\sin V' + x\sin(V'+B) \\ x\sin V'' + y\sin(V''+C) & y\sin V'' + x\sin(V''-C) & 0 \end{vmatrix}$$

Cette relation est aussi l'équation de la cubique que doivent décrire les points M et P, pour que, l'un d'eux étant donné, ainsi que les angles V, V′, V″, l'autre existe.

Cette cubique est circonscrite au triangle de référence.

288. — *Si* P, P_1, *sont deux points inverses dans le triangle* ABC, A_1, B_1, C_1, *les centres des circonférences* APP_1, BPP_1, CPP_1, *les droites* AA_1, BB_1, CC_1, *se coupent en un même point de la circonférence circonscrite.*

On démontre ce théorème par des considérations de géométrie élémentaire.

Si P est un point remarquable, M point d'intersection de AA_1, BB_1, CC_1, est aussi un point remarquable.

On a vu analytiquement que si P_1P_2 sont les points de Brocard, M est le point de Tarry. (*J. M. E.* Ex. divers. 1891. p. 226, n° 190.)

BIBLIOGRAPHIE

Exercices gradués de dessin topographique, à l'usage des candidats à Saint-Cyr, par M. *L. Bécoust*, sous la direction de M. *Pillet*. — Paris, librairie Hachette. — Prix : 4 francs.

L'épreuve de lavis, qui se faisait pour l'admission à Saint-Cyr, a été remplacée en 1893 par une copie de carte topographique. Cette modification dans les épreuves nous a paru judicieuse; elle avait peut être l'inconvénient de venir un peu brusquement pour les derniers examens, et bien certainement, en 1893, beaucoup de candidats, et même de professeurs, ont dû se demander en quoi consisterait exactement cette épreuve.

Nous avons le plaisir de signaler, aux lecteurs du *Journal*, un ouvrage qui vient de paraître, et qui répond bien non seulement à la lettre, mais encore à l'esprit du programme. La succession très bien graduée des exercices, le texte qui accompagne chacun d'eux, et qui enseigne l'écriture topographique de la carte au vingt-millième, les exercices de composition qui viennent à la fin, constituent, à notre avis, un excellent guide pour cette épreuve nouvelle, et même, pour l'avenir, lorsque les candidats seront entrés à Saint-Cyr, ils consulteront plus d'une fois les exercices gradués.

Nous pouvons ajouter que, au point de vue graphique, les meilleurs conseils sont donnés par l'auteur, qui s'est déjà fait connaître par une intéressante collection d'albums de dessin, en cours de publication à la même librairie, sous le titre : *Le dessin technique*, et qui rendra de très grands services dans une branche que les candidats aux écoles ont, jusqu'ici, trop négligée.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1893

(Mathématiques élémentaires).

I. — On donne, dans un plan, un triangle fixe *abc*, et on considère un triangle ABC, égal au triangle *abc*, et mobile dans le plan. On suppose le triangle mobile ABC d'abord superposé à *abc* (A en *a*, B en *b*, C en *c*).

Soit O, un point du plan tel, que si l'on fait tourner autour de ce point le triangle mobile ABC, de façon à l'amener de sa première position à une autre pour laquelle le côté AB est devenu parallèle à *ac*, le triangle ABC se place sur un triangle $a'b'c'$ (A en a', B en b', C en c'), tel que b' est situé sur OC.

1° Trouver la ligne (L), lieu des points O, qui satisfont à cette condition;

2° Trouver le lieu décrit par chacun des sommets du triangle $a'b'c'$ quand O décrit la ligne (L).

II. — Etant données, dans un plan, une parabole et une droite D perpendiculaire à l'axe de cette parabole, trouver, sur l'axe de la parabole, un point A tel que si M est un point de la parabole, et si P est le pied de la perpendiculaire à la droite D menée par le point M, la différence $\overline{MA}^2 - \overline{MP}^2$ soit constante, quelle que soit la position du point M sur la parabole.

Trouver le lieu des points d'un plan tels que la différence des carrés des distances de chacun de ces points à un point A et à une droite D, donnés dans le plan, soit constante et égale à une quantité donnée.

Montrer que la connaissance de ce lieu permet de résoudre, avec la règle et le compas, le problème suivant :

Étant donnés dans un plan une droite D et deux cercles C et C', mener un cercle qui soit tangent à la droite D qui coupe le cercle C en des points diamétralement opposés sur ce cercle C et le cercle C' en deux points diamétralement opposés sur ce cercle C'.

BACCALAURÉATS (*)

(NOVEMBRE 1892)

BACCALAURÉAT CLASSIQUE (Lettres. — Mathématiques.)

Mathématiques (**).

Problème obligatoire. — Deux cônes inscrits dans une sphère donnée ont leurs sommets A et B en deux points diamétralement opposés de cette sphère ; ils ont même base, et cette base est un petit cercle de la sphère ayant pour centre E et pour rayon CE.

Ayant posé : $CE = x$,

$AB =$ diamètre de la sphère $= 2R$,

On demande de calculer x de telle façon que le produit des surfaces latérales des deux cônes soit égal à l^4 ; l étant une longueur donnée. Discuter.

Trois questions à choisir :

Distance d'un point à un plan en géométrie descriptive.

Angle de deux plans en géométrie descriptive.

Distance d'un point à une droite en géométrie descriptive.

Académie de Lyon.

Étant donnée une pyramide triangulaire AOBC, dans laquelle le point O est le sommet d'un angle trièdre trirectangle, et où l'on a $OA = a = 10$ m., $OB = b = 20$ m., $OC = c = 30$ m., on propose de calculer : 1° le volume de cette pyramide ; 2° la surface du triangle ABC ; 3° la distance OP du sommet O au plan ABC, et enfin, 4° les angles que fait cette perpendiculaire OP avec les arêtes OA, OB et OC.

(*) Les énoncés où l'on donne des *questions à choisir* représentent ceux qui correspondent au *baccalauréat classique.*

(**) Cet énoncé est celui de novembre 1893, *Académie de Paris ;* 1re session.

I. On donne les rayons R, R′ de deux cercles, ainsi que la distance des centres $OO' = d$, et l'on demande de trouver sur la ligne OO′ un point M, tel que les tangentes MA, MA′ soient dans un rapport donné *m*.

$$R = 8 \text{ m. } 00$$
$$R' = 2 \text{ m. } 13$$
$$d = 9 \text{ m. } 19$$

II. Surface engendrée par une ligne brisée régulière qui tourne autour du diamètre du cercle dans lequel elle est inscrite.

III. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

Académie de Lille.

I. — *Questions à choisir :* 1° Énoncer et démontrer les théorèmes qui donnent la valeur algébrique de la projection d'un segment sur un axe.

2° Exprimer sin *a*, cos *a*, tg *a*, en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. Pourquoi trouve-t-on, dans chacun des trois cas, une seule valeur ?

3° Résoudre et discuter l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Nota. — Ne développer qu'une seule méthode.

Problème. Étant donné un segment de droite AB on prend, sur ce segment, entre A et B, un point fixe O et on élèvera en A, B les perpendiculaires AX, BY à la droite AB. Déterminer un point C sur AX et un point D sur BY, de manière que l'angle COD soit droit et que la distance du point O à la droite CD soit égale à une longueur donnée R.

On posera : $OA = a$, $OB = b$, et on calculera $AC = x$, $BD = y$, $CD = z$.

Académie de Montpellier.

1re série. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la hauteur et la somme des deux côtés de l'angle droit. Dans quel cas le problème est-il possible ?

2e série. — I. *Questions à choisir :* 1° Somme des carrés des *n* premiers nombres entiers; 2° Formule des annuités; 3° Des erreurs relatives. Définition et applications.

II. *Problème.* — En abaissant du sommet A de l'angle droit d'un triangle ABC une perpendiculaire AD sur l'hypoténuse, on partage en moyenne et extrême raison la surface de ce triangle, de manière qu'on ait : $\frac{ADC}{ABD} = \frac{ABC}{ADC}$. Calculer, d'après cela, les angles de ce triangle.

3e série. — On connaît dans un triangle les côtés *a*, *b* et l'angle compris C. On veut mener par le sommet C une droite CD qui partage la surface du triangle en deux parties CAB et CBD respectivement proportionnelles à *m* et *n*. Quel angle devra faire cette droite avec le côté *b* ?

Application. — $a = 180$ m. 25 ; $b = 209$ m. 86 ; $C = 72°, 34' 45''$; $m/n = 3/7$.

II. Donner la vraie valeur de l'expression $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$ pour $x = 2$.

QUESTION 477

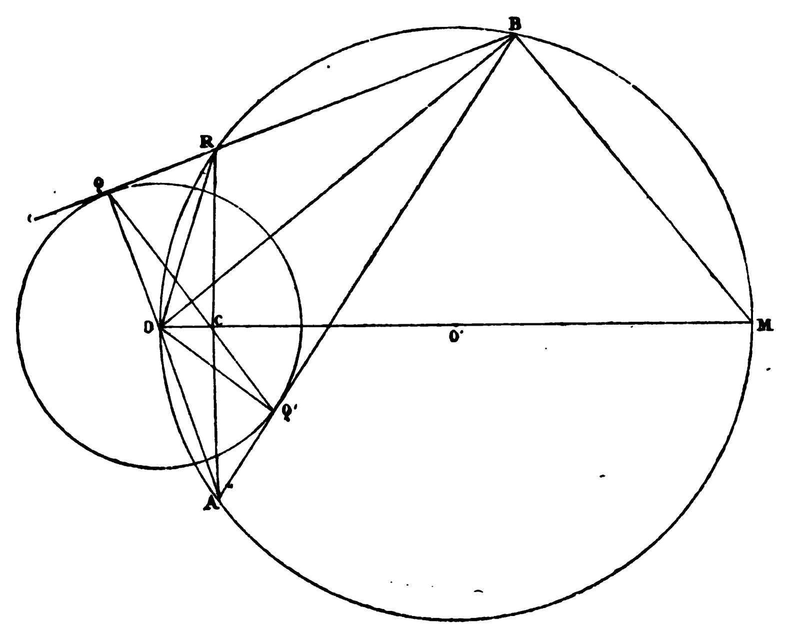
Solution par M. W. J. Greenstreet *(M.A)*.

Si l'on considère un cercle C *et un autre cercle* C′ *passant par le centre* O *de* C, *toute tangente à* C *rencontre la circonférence* C′ *en deux points* A *et* B, *tels que* OA × OB = *constante.*

(E.-N. Barisien.)

Soient BQ′A, BRQ les tangentes de B au cercle O, OQ′ = OQ = r; OO′ = R.

Le diamètre OO′ rencontre la circonférence O′ en un



point M. Traçons BM, OB, OA. Dans les triangles OQ′A, OBM, nous avons :

$$\widehat{OQ'A} = \widehat{OBM} = 90^\circ; \text{ et } \widehat{OAQ'} = \widehat{OMB};$$

d'où

$$\frac{AO}{OQ'} = \frac{OM}{OB}, \text{ ou } AO.OB = OM.OQ' = 2Rr = \textit{constante}.$$

Remarque. — On peut observer que la corde de contact QQ′, la ligne des centres OO′, et la ligne RA sont concourantes.

En effet, OB divise l'angle ABQ en deux parties égales, donc

$$\text{arc OR} = \text{arc OA}.$$

Ainsi RA est perpendiculaire à OO′; les points O, C, Q′, A sont donc *concycliques*.

D'après cela,

$$\widehat{Q'CO} = \varpi - \widehat{OAQ'} = \widehat{ORB} = \varpi - \widehat{QRO} = \varpi - \widehat{QCO} = \varpi - O'CQ'$$

donc $$\widehat{OCQ'} + O'CQ' = \varpi,$$

Ainsi, Q, C, Q′, sont *collinéaires*.

Nota. — Solutions diverses par MM. E. Foucart, élève au lycée Michelet; Aletrop, à Madrid; A. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy; James Hais, répétiteur au collège d'Étampes; Bergmann.

QUESTION 480.

Solution par Mme Ve F. Prime.

Si dans le triangle ABC, *rectangle en* A, *on joint le centre* O *du cercle inscrit aux sommets du triangle; et si* r_1, r_2, r_3 *sont les rayons des cercles inscrits aux triangles* BOC, COA, BOA, *et* l_1, l_2, l_3 *les côtés des carrés inscrits aux mêmes triangles, on a*

$$\frac{b}{r_2} + \frac{c}{r_3} - \frac{a}{r_1} = 2 + 2\sqrt{2}, \qquad \frac{b^2}{l_2^2} + \frac{c^2}{l_3^2} - \frac{a^2}{l_1^2} = 5.$$

(G. Russo).

1° Désignons par A′, B′, C′, les points de contact des circonférences r_1, r_2, r_3 avec les côtés a, b, c, on a

$$\frac{b}{r_2} = \frac{AB'}{r_2} + \frac{B'C}{r_2} = \cot g\frac{\pi}{8} + \cot g\frac{C}{4},$$

$$\frac{c}{r_3} = \frac{AC'}{r_3} + \frac{C'B}{r_3} = \cot g\frac{\pi}{8} + \cot g\frac{B}{4},$$

$$\frac{a}{r_1} = \frac{BA'}{r_1} + \frac{A'C}{r_1} = \cot g\frac{B}{4} + \cot g\frac{C}{4},$$

donc $$\frac{b}{r_2} + \frac{c}{r_2} - \frac{a}{r_1} = 2\cot g\frac{\pi}{8} = 2(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

2° r désignant le rayon du cercle inscrit à ABC, on a

$$\frac{b}{b_2} = \frac{r}{r - l_2} = \frac{r + b}{r} = 1 + \frac{b}{r}.$$

Il en résulte que

$$\frac{b^2}{l_2^2} + \frac{c^2}{l_3^2} - \frac{a^2}{l_1^2} = 1 + \frac{2(b + c - a)}{r} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{r^2}.$$

Mais ABC étant rectangle en A, on a

$$a^2 = b^2 + c^2$$

et $$b + c - a = 2r;\ \text{etc...}$$

Nota. — Solutions diverses par MM. E. Foucart, élève au lycée Michelet; A. Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy; Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille; Bergmann.

QUESTION 481

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

Si, dans un triangle ABC, *on joint le centre* O *du cercle inscrit aux sommets du triangle; et si* l_1, l_2, l_3 *sont les côtés des carrés inscrits aux triangles* BOC, COA, AOB, *on a*

$$\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_2} + \frac{c}{l_3} - \frac{2p}{r} = 3.$$

Si le triangle est équilatéral, on a

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}.$$

(r *est le rayon du cercle inscrit au triangle* ABC.)

(G. Russo.)

On a

$$(1)\quad \frac{a}{l_1} = \frac{a + r}{r}, \qquad \frac{b}{l_2} = \frac{b + r}{r}, \qquad \frac{c}{l_3} = \frac{c + r}{r},$$

d'où $$\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_2} + \frac{c}{l_3} = \frac{a + b + c}{r} + 3.$$

Par suite $$\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_2} + \frac{c}{l_3} - \frac{2p}{r} = 3.$$

Si le triangle est équilatéral, on a bien

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r};$$

mais cette relation, d'après (1), a lieu *pour un triangle quelconque.*

NOTA. — Solutions analogues par MM. E. FOUCART, élève au lycée Michelet; A. DROZ-FARNY, professeur au lycée de Porrentruy; BERGMANN; W. T. GREENSTREET (M. A.); Mme Ve F. PRIME, à Bruxelles.

QUESTION 484.

Solution par Mme Ve F. PRIME.

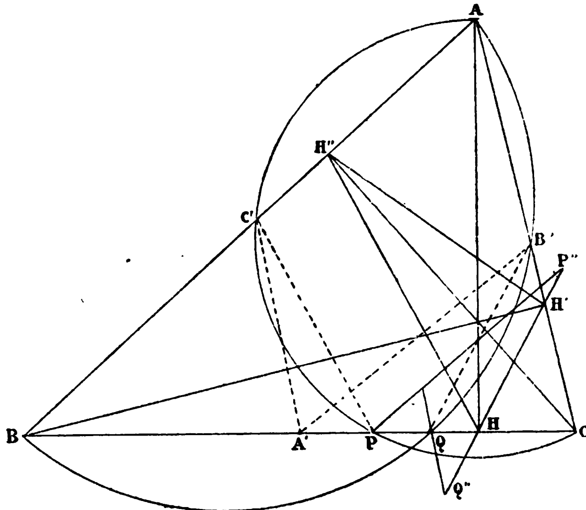
On considère, dans un triangle ABC, *les milieux des côtés (les points* A′, B′, C′*) et les pieds* H, H′, H″ *de ses hauteurs.*

1° Les circonférences ACC′, ABB′ *coupent respectivement* BC *en deux points* P, Q *qui sont isotomiques sur* A′H.

2° La parallèle à AB, *menée par* P *et la parallèle à* AC, *menée par* Q, *sont deux transversales réciproques du triangle* HH′H″.

(G. L.)

Les droites B′Q et AB, C′P et AC étant antiparallèles, res-



pectivement, dans les angles C, B du triangle ABC, le trapèze B′PQC′ est isoscèle; or il en est de même du trapèze B′A′HC′,

car HB' (*) $= \frac{AC}{2} = A'C'$. Le milieu de HA' est donc aussi celui de PQ.

2° Soient p, p', p'' et q, q', q'' les points où ces parallèles rencontrent les côtés du triangle $HH'H''$. $B'Q$ étant parallèle à $H'H$, on a $H'q'' = B'Q$. D'autre part, les triangles PHp'', $QA'B'$ sont égaux; donc $Hp' = B'Q = H'q''$, etc...

Nota. — Autre solution, par M. GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille; E. FOUCART, élève au lycée Michelet.

QUESTION 485

Solution par M. ALETROP, de Madrid.

Démontrer que l'expression

$$\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\beta-\alpha) - 2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)\cos 2\alpha$$

est indépendante de β. (G. L.)

On a, en effet,

$$\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\beta-\alpha) - 2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)\cos 2\alpha$$
$$= 2\sin^2\alpha\cos^2\beta(1-2\cos 2\alpha) + 2\cos^2\alpha\sin^2\beta(1+2\cos 2\alpha)$$
$$= 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2 2\alpha.$$

Cette dernière forme justifie l'énoncé.

NOTA. — Solutions analogues par MM. E. GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille; Th. M. WLADIMIRESCU, de Roumanie; YOUSSOUFIAN, à Constantinople; A. DROZ-FARNY; W. T. GREENSTREET (M. A.); E. FOUCART, élève au lycée Michelet.

Mme Ve F. PRIME ajoute à la solution précédente deux autres solutions. Dans l'une, elle vérifie que la dérivée de l'expression, par rapport à β, est nulle.

Dans l'autre, elle observe que si l'on projette un point M sur les côtés d'un angle 2α, en P, Q, $\overline{PQ}^2$ représente les valeurs de l'expression considérée. Or, PQ est constant, donc...

QUESTION 486

Solution par M. A. DROZ FARNY.

Éliminer le paramètre φ *entre les deux égalités :*

$$2x \sin^3\theta = C\sin^2\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right),$$

$$2y \sin^3\theta = C\sin^2\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right). \qquad \text{(G. L.)}$$

(*) Pour ne pas compliquer la figure, HB' n'a pas été tracé.

On a
$$\frac{x}{y}=\frac{\sin\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\varphi+\frac{\theta}{2}\right)},$$

d'où
$$\frac{x+y}{y-x}=\frac{\sin\varphi\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\varphi\sin\frac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Puis,
$$4xy\sin^6\theta=C^2\sin^3\left(\varphi+\frac{\theta}{2}\right)\sin^3\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=C^2\left[\sin^2\varphi\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\varphi\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^3.$$

Or,
$$\sin^2\varphi=\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{(x+y)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{(y-x)^2+(x+y)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}},$$
$$\cos^2\varphi=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{(y-x)^2}{(y-x)^2+(x+y)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}.$$

On a donc
$$4xy\sin^6\theta$$
$$=C^2\left[\frac{(x+y)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{(y-x)^2+(x+y)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}-\frac{(y-x)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{(y-x)^2+(x+y)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\right]^3,$$
ou
$$4xy\sin^6\theta=C^2\sin^6\frac{\theta}{2}\left[\frac{4xy}{(x-y)^2+(x+y)^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\right]^3.$$

Finalement,
$$4\left[(x-y)^2\cos^2\frac{\theta}{2}+(x+y)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]=C^2x^2y^2.$$

NOTA. — Solutions diverses par MM. W. J. GREENSTREET (M. A.); YOUSSOUFIAN, à Constantinople; Mme Ve F. PRIME; VLADIMIRESCU; GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille.

QUESTIONS PROPOSÉES

528. — On considère un triangle ABC variable; les sommets B, C sont fixes et le périmètre du triangle est constant. On construit, extérieurement aux côtés du triangle, des carrés sur les trois côtés, et on trace les droites passant par les sommets extérieurs, les plus voisins, des carrés pris deux à deux. On forme ainsi un hexagone. Trouver le maximum et le minimum de son aire. *(E.-N. Barisien.)*

529. — On donne deux circonférences, de rayons R et R′, tangentes entre elles extérieurement. On construit une troisième circonférence tangente à chacune des deux premières et ayant son centre sur leur ligne des centres. Démontrer que le rayon ρ du cercle tangent à ces trois cercles est donné par la formule

$$\rho = \frac{RR'(R + R')}{R^2 + R'^2 + RR'}.$$

(E.-N. Barisien.)

530. — On donne un triangle isoscèle *asb* et sa hauteur *sh*. Du sommet *b*, on mène une droite arbitraire : elle rencontre *sh* au point *c*, *sa* au point *d*, et elle rencontre, au point *p*, la parallèle à *ab* menée par le milieu de *sh*. On prend le point *q*, symétrique de *p* par rapport à la parallèle à *ab* menée du point *s*. Démontrer que la droite *qd* passe par le milieu du segment *ac*. *(Mannheim.)*

ERRATA

Pages 225-226 (Ex. divers n° 285) *au lieu de :* § 2° sont égaux; *lisez :* sont semblables.

On peut ajouter une quatrième propriété de la figure :

4° *Les droites* AO_a, BO_b, CO_c, *sont concourantes en un point* P, *centre de similitude des triangles* ABC, $O_aO_bO_c$; *ce point* P *est le second point d'intersection des circonférences circonscrites à ces deux triangles.*

— 232, ligne 8, *au lieu de :* ν_0, *lisez :* Γ_0.

— ligne 14, *au lieu de :* K_a, *lisez :* K_a,...

— ligne 15, *au lieu de :* Γ_a, *lisez :* Γ_0.

— 233, ligne 15, *au lieu de :* soit de ; *lisez :* doit se.

— ligne 7, en remontant, *au lieu de :* en points réels ; *lisez :* en des points réels.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22042-10-93.

SUR L'EXTRACTION DES RACINES CARRÉES
PAR LES MOYENNES

Par M. **Aubry**.

Dans un article que nous avons publié dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, sur la relation $(1+x)^m > 1+mx$, nous avons rappelé une méthode d'extraction des racines carrées que l'on croit avoir été connue des Anciens. Malgré cela, il nous a semblé que quelques détails sur ce sujet ne seront pas sans fruit.

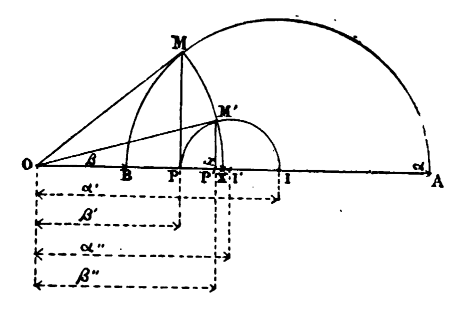
Cherchons le moyen arithmétique et le moyen harmonique de deux nombres positifs quelconques α, β, le moyen arithmétique et le moyen harmonique de ces mêmes moyens, les moyens de ces seconds moyens, etc. Tous ces moyens se rapprocheront, de plus en plus, de la valeur $\sqrt{\alpha\beta}$, qui en est la limite commune.

On a toujours $(\alpha-\beta)^2 > 0$; ajoutons $4\alpha\beta$ aux deux membres, il vient

(1) $(\alpha+\beta)^2 > 4\alpha\beta$,

d'où

(2) $\dfrac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$.



Multiplions les deux membres de (1) par $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$; puis, extrayons les racines carrées, nous avons

$$(3)\qquad \sqrt{\alpha\beta} > \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Ainsi en représentant par (α, β) et $[\alpha, \beta]$, respectivement, le moyen arithmétique et le moyen harmonique de α et de β, on a

$$(4)\qquad (\alpha, \beta) > \sqrt{\alpha\beta} > [\alpha, \beta].$$

Soit $\alpha' < \alpha$, on aura $2\beta^2\alpha' < 2\beta^2\alpha$. Ajoutons $2\alpha\beta\alpha'$ aux deux membres et divisons par $(\beta+\alpha)(\beta+\alpha')$, nous trouverons

$$(5)\qquad [\alpha', \beta] < [\alpha, \beta].$$

Donc *on augmente le moyen harmonique de deux nombres en augmentant l'un de ces nombres.* La même conclusion est évidente pour le moyen arithmétique et pour le moyen géométrique.

Soit $\alpha > \beta$, on aura $[\alpha, \beta] > [\beta, \beta]$; or, $[\beta, \beta] = \beta$; donc comme le moyen arithmétique et le moyen géométrique sont respectivement compris entre α et β,

(6) $$\alpha > (\alpha, \beta) > \sqrt{\alpha\beta} > [\alpha, \beta] > \beta.$$

Ainsi, *le moyen arithmétique et le moyen harmonique de α et de β sont compris entre ces deux nombres et comprennent, en outre, le moyen géométrique.*

Maintenant, si l'on pose $(\alpha, \beta) = \alpha'$, $[\alpha, \beta] = \beta'$, on aura, de même, $$(\alpha' \beta') > \sqrt{\alpha'\beta'} > [\alpha', \beta'].$$

Or le moyen géométrique de α' et de β' est également moyen géométrique de α et de β, puisque

$$\alpha\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = (\alpha, \beta)[\alpha, \beta] \quad \text{d'où} \quad \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha'\beta'}.$$

On a donc

$$\alpha > \alpha' > (\alpha', \beta') > \sqrt{\alpha\beta} > [\alpha', \beta'] > \beta' > \beta.$$

On aura, de même, en faisant $(\alpha', \beta') = \alpha''$, $[\alpha', \beta'] = \beta''$:

$$\alpha > \alpha' > (\alpha'', \beta'') > \sqrt{\alpha\beta} > [\alpha'', \beta''] > \beta' > \beta,$$

et, en continuant de même :

(9) $$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \alpha''' > \ldots > \sqrt{\alpha\beta} > \ldots > \beta''' > \beta'' > \beta' > \beta.$$

Observons qu'on a

(10) $$\frac{\alpha - \beta}{\alpha' - \beta'} = 2\,\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} > 2,$$

ce qui donne

(11) $$\alpha - \beta > 2(\alpha' - \beta') > 4(\alpha'' - \beta'') > 8(\alpha''' - \beta''') > \ldots$$

Ainsi les termes de la série $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$, $\alpha'' - \beta''$, ... peuvent devenir aussi petits qu'on veut : les deux séries α, α', α'', ... et β, β', β'',... tendent donc vers la limite commune $\sqrt{\alpha\beta}$.

Tout ce qui précède se démontre aisément par la géométrie élémentaire. Soient $OA = \alpha$, $OB = \beta$; sur AB comme

diamètre, décrivons une demi-circonférence IA; menons la tangente OM, rabattons OM en OX par l'arc de cercle MX et abaissons la perpendiculaire MP sur OA. On a

$$OX = OM = \sqrt{\alpha\beta}, \quad OI = (\alpha, \beta) = \alpha', \quad OP = [\alpha, \beta] = \beta'.$$

Or les triangles rectangles OMI, OMP donnent la relation

$$OI > OM > OP$$

d'où $$\alpha > \alpha' > OX > \beta' > \beta.$$

D'un autre côté, on a

$$\alpha'\beta' = OP(OP + PI) = \overline{OP}^2 + OP.PI = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 = \alpha\beta;$$

donc, si sur PI comme diamètre, on décrit une circonférence II' et que, du point M' où elle coupe l'arc MK, on abaisse sur OA la perpendiculaire M'P', on aura $OI' = \alpha''$, $OP' = \beta''$, puisque $OM' = OX$. On a donc

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \sqrt{\alpha\beta} > \beta'' > \beta' > \beta;$$

et ainsi de suite.

Exemple. — Soit à extraire la racine carrée de 24; on posera $\alpha = 6$, $\beta = 4$, on exécutera la série d'opérations suivantes:

$$\alpha' = (\alpha, \beta) = 5, \qquad \beta' = \frac{24}{\alpha'} = 4{,}8,$$

$$\alpha'' = (\alpha', \beta') = 4{,}9, \qquad \beta'' = \frac{24}{\alpha''} = 4{,}8979592,$$

$$\alpha''' = (\alpha'', \beta'') = 4{,}8989796, \qquad \beta''' = \frac{24}{\alpha'''} = 4{,}8989794.$$

On a donc $\sqrt{24} = 4{,}8989795\ldots$

THÉORÈME GÉNÉRAL
DES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Par M. S. **Pellat**, élève au lycée Louis-le-Grand.

1. Théorème I. — *Soit* $\ldots\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ *un nombre entier. Désignons par* n *un nombre entier quelconque et par* a *la différence (positive, nulle ou négative) qui existe entre la base du système de numération dans lequel se trouve écrit le nombre* $\ldots\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$, *et un multiple déterminé quelconque* mn *du nombre* n. *En divisant par le nombre* n, *soit le nombre* $\ldots\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$, *soit la somme algébrique* $\alpha + \beta a^1 + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 + \ldots$, *on obtiendra le même reste.*

Le nombre $\ldots\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ représente la somme :

(1) $\alpha + \beta(mn+a)^1 + \gamma(mn+a)^2 + \delta(mn+a)^3 + \varepsilon(mn+a)^4 + \ldots$

Or, en élevant le binôme $(mn + a)$ à une puissance quelconque k, on obtient un polynôme dont tous les termes sont multiples de n, sauf le terme a^k. Par suite, le nombre $(mn + a)^k - a^k$ est un multiple de n.

Ceci posé, si nous retranchons de

(1) $\alpha + \beta(mn+a)^1 + \gamma(mn+a)^2 + \delta(mn+a)^3 + \varepsilon(mn+a)^4 + \ldots$

la somme suivante qui est multiple de n :

(2) $$\left\{ \begin{array}{r} \beta[(mn+a)^1 - a^1] + \gamma[(mn+a)^2 - a^2] + \delta[(mn+a)^3 - a^3] \\ + \varepsilon[(mn+a)^4 - a^4] + \ldots \end{array} \right.$$

nous obtenons

(3) $$\alpha + \beta a^1 + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 + \ldots$$

Ainsi, les sommes (1) et (3), divisées par n, donnent le même reste.

COROLLAIRE. — *En particulier, si le nombre* $\ldots\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$ *est divisible par* n, *la somme* $\alpha + \beta a^1 + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 + \ldots$ *sera divisible par* n.

2. — De ce théorème, on peut déduire des caractères de divisibilité par un nombre donné, quelle que soit la base du système considéré.

Les caractères de divisibilité auxquels on est ainsi conduit sont remarquables pour les nombres qui ont un multiple voisin de la base.

Les caractères de divisibilité trouvés sont encore remarquables pour tous les nombres ayant un multiple voisin d'une puissance positive, entière, de la base. On peut, en effet, observer qu'un nombre peut être considéré comme écrit dans le système d'une quelconque des puissances de la base.

Prenons le nombre 15 523, par exemple, écrit dans le système décimal. On peut l'imaginer écrit dans le système dont la base est 10^2 en l'écrivant 1|55|23 ; ou dans le système de base 10^3, en le mettant sous la forme 15|523, etc.

3. — On peut d'abord déduire du théorème général les caractères de divisibilité connus :

THÉORÈME Ier. — *Dans un système de base* n, *un nombre est divisible par* n *(ou par un de ses sous-multiples) si son dernier chiffre est divisible par* n *(ou par ce sous-multiple)* (*).

Soit ...εδγβα, un nombre N, écrit dans un système de base n. — Ici, a est nul. Si N est divisible par n, d'après le théorème général, la somme $\ldots + \varepsilon 0^4 + \delta 0^3 + \gamma 0^2 + \beta 0^1 + \alpha$, qui se réduit à α, est divisible par n (ou par le sous-multiple).

On démontrerait d'une façon identique, en s'appuyant sur la remarque faite plus haut, qu'un nombre est divisible par n^k (ou par un de ses sous-multiples), si le nombre constitué par ses k derniers chiffres est divisible par n^k (ou par ce sous-multiple).

De là résulte la divisibilité par 10, 5, 2, ou par 100, 25... dans le système décimal

THÉORÈME II. — *Dans un système de base* n, *un nombre est divisible par* n — 1 (ou par un de ses sous-multiples) *si la somme de ses chiffres est divisible par* n — 1 (ou par ce sous-multiple).

Soit ...εδγβα un nombre N écrit dans un système de base n.

Ici, nous avons $a = 1$; si N est divisible par n, d'après le théorème général, la somme $\ldots + \varepsilon 1^4 + \delta 1^3 + \gamma 1^2 + \beta 1^1 + \alpha$, qui se réduit à $\varepsilon + \delta + \gamma + \beta + \alpha$ est divisible par $n - 1$ (ou par le sous-multiple).

D'où, en particulier, la divisibilité par 9 et par 3, dans le système décimal.

THÉORÈME III. — *Dans un système de base* n, *un nombre est divisible par* n + 1 (ou par un de ses sous-multiples) *si la somme de ses chiffres de rang impair à partir de la droite, diminuée de la somme des autres chiffres, est divisible par* n + 1 (ou par le sous-multiple).

Soit ...εδγβα un nombre N écrit dans un système de base n. Comme on a dans ce cas $a = -1$, si N est divisible

(*) Nous rappelons ici que o peut être considéré comme un multiple de tous les nombres.

par n, d'après le théorème général, la somme... $+ \varepsilon(-1)^4 + \delta(-1)^3 + \gamma(-1)^2 + \beta(-1)^1 + \alpha$, qui se réduit à $\alpha + \gamma + \varepsilon + \ldots - (\beta + \delta + \ldots)$ est divisible par $n + 1$ (ou par le sous-multiple).

De ce théorème on déduit la divisibilité par 11, dans le système décimal.

4. — En considérant un nombre écrit dans une base n comme écrit dans le système d'une puissance positive et entière quelconque de sa base n^k, nous pouvons encore énoncer les deux théorèmes suivants :

1° *Dans un système de base* n, *un nombre est divisible par* $n^k - 1$ (ou par un de ses sous-multiples) *si la somme des nombres obtenus en le divisant en tranches de* k *chiffres en commençant par la droite est divisible par* $n^k - 1$ (ou par ce sous-multiple).

En appliquant ce théorème au système décimal on a les caractères de divisibilité par 99, par 999, ou par un de leurs sous-multiples (33, 27, 37, 81, 111, etc.).

2° *Dans un système de base* n *un nombre est divisible par* $n^k + 1$ (ou par un de ses sous-multiples) *si en le divisant en tranches de* k *chiffres, en commençant par la droite, on obtient des nombres tels que la somme de ceux de rang impair à partir de la droite, diminuée de la somme des autres, est divisible par* $n^k + 1$ (ou par ce sous-multiple).

Nous pourrons appliquer ce théorème en cherchant dans le système décimal si un nombre est divisible par 101, par 1001 ou par un de ses sous-multiples (7, 13, 91, 77, 143, etc....).

5. — Proposons-nous maintenant d'appliquer le théorème général à la recherche de quelques caractères de divisibilité, en montrant, par des exemples, les simplifications qui peuvent s'introduire dans les calculs.

Divisibilité par **19**. — 19 a parmi ses multiples le nombre 95, qui est inférieur à 100 de 5 unités.

Cherchons si le nombre 2|28|61|75 est divisible par 19.

Théoriquement nous devons faire les calculs suivants :

$$75 + 61 \times 5 + 28 \times 25 + 2 \times 125 = 13|30,$$
$$30 + 13 \times 5 = 95 \text{ (\textit{multiple de} 19).}$$

Mais il est plus court d'opérer ainsi :

$$\begin{array}{llll}
2 \times 5 = 10 & & & 13 \times 5 = 65 \\
\quad\; + 28 & & & \quad\;\; + 30 \\
\quad\;\; 38 \times 5 = 190 & & & \quad\;\;\; 95 \text{ (\textit{multiple de} 19.)} \\
\qquad\qquad\; + 61 & & & \\
\qquad\qquad\;\; 251 \times 5 = 1255 & & & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; + 75 & & & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; 13|30 & & &
\end{array}$$

D'ailleurs, nous remarquons, en effectuant, que 38 est un multiple de 19; par suite, au lieu de continuer régulièrement, nous cherchons si 61|75 est un multiple de 19.

$$\begin{array}{l}
61 \times 5 = 305 \\
\qquad\quad + 75 \\
\qquad\quad\; 380 \text{ (\textit{multiple de} 19).}
\end{array}$$

Divisibilité par **17**. — 17 a, parmi ses multiples, le nombre 102, qui est supérieur à 100 de 2 unités.

1° Cherchons si le nombre 1|81|24|04 est divisible par 17.

Calcul conforme à la théorie :

$$4 + 81 \times 4 - (24 \times 2 + 1 \times 8) = 328 - 56 = 2|72,$$
$$72 - 2 \times 2 = 68 \text{ (\textit{multiple de} 17.)}$$

Calcul pratique :

$$\begin{array}{ll}
-1 \times 2 = -2 & \qquad 72 - 2 \times 2 = 68 \text{ (\textit{multiple de} 17.)} \\
\qquad\quad\;\, + 81 & \\
\qquad\quad\;\;\, 79 \times 2 = 158 & \\
\qquad\qquad\qquad\; - 24 & \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 134 \times 2 = 268 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\, + 4 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 272 &
\end{array}$$

2° Cherchons encore si 71|57|35|07 est divisible par 17. Nous observons qu'en faisant la suite d'opérations indiquées nous aurons à opérer tout le temps sur des nombres négatifs. — Dans ce cas, au lieu de commencer par multiplier -71

par 2, nous pouvons multiplier + 71 par 2, à condition d'additionner toutes les fois que nous devrions retrancher, et réciproquement. Nous obtenons ainsi un nombre égal, en valeur absolue, à celui que nous cherchons.

Nous ferons la suite d'opérations :

$$
\begin{array}{l}
71 \times 2 = 142 \\
\quad\quad\quad \underline{-\ 57} \\
\quad\quad\quad\ \ 85 \times 2 = 170 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{+\ 35} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 205 \times 2 = 410 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{-\ 7} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 403
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2 \times 4 = 8 \\
\underline{-\ 3} \\
5
\end{array}
$$

Le nombre n'est pas multiple de 17.

D'ailleurs dans ce cas, on peut simplifier encore la recherche d'une autre façon, en observant que

$$71 - 68\ (\textit{multiple de } 17) = 3$$
$$35 - 34\ (\textit{multiple de } 17) = 1$$

Alors, on écrit

$$
\begin{array}{r}
-3 \times 2 = -6 \\
\underline{+\ 57} \\
51
\end{array}
(\textit{multiple de } 17)
\qquad
\begin{array}{r}
-1 \times 2 = -2 \\
\underline{+\ 7} \\
5
\end{array}
$$

Divisibilité par **7**. — Cherchons si le nombre 96.169.724 est divisible par 7. Nous savons que 1001 est un multiple de 7 et qu'il en est de même de 98. Par suite, nous opérerons comme il suit :

$$
\begin{array}{r}
96|169|724 \\
724 \\
\underline{+\ 96} \\
820 \\
\underline{-\ 169} \\
651
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6|51 \\
2 \times 6 = 12 \\
\underline{+\ 51} \\
63
\end{array}
(\textit{multiple de } 7)
$$

Divisibilité par **13**. — Cherchons si le nombre 355966 est divisible par 13. Nous savons que 1001 est un multiple de 13 et qu'il en est de même de 104.

Par suite, nous disposerons les calculs de la manière suivante:

$$
\begin{array}{r}
966 \\
\underline{-\ 355} \\
611
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6|11 \\
4 \times 6 = 24 \\
\underline{-\ 11} \\
13
\end{array}
$$

On peut ainsi trouver plusieurs caractères de divisibilité, plus ou moins simples, suivant les cas.

Certains d'entre eux ne sont utiles que si on les applique à des nombres très considérables; d'autres ne sont assez simples pour être mis en pratique, que si les nombres auxquels on les applique permettent des simplifications; mais la plupart deviennent très maniables pour ceux qui ont pris l'habitude de s'en servir. Cette habitude, seule, peut enseigner la marche à suivre dans chaque exemple et les simplifications de calcul qu'il peut comporter.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 254.)

289. — *On a*

$$1 + (n-3) + (n-4) + \frac{(n-4)(n-5)}{1.2} + \frac{(n-5)(n-6)}{1.2} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$= (n-2) + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} + \ldots$$

à la condition de prendre 2p *termes dans le premier membre,* p *dans le second.*

290. — *La droite qui passe par les centres isogones est parallèle à la droite qui joint le centre de gravité* G, *au point de Tarry* N.

291. — *Dans tout triangle, on a :*

$$\sum \frac{a^2(4bc \cos B \cos C - a^2)}{(b-c)^2} + \sum \frac{2bc(bc + 2a^2 \cos A)}{(c-a)(a-b)} = 0.$$

292. — *L'équation du cercle de diamètre* P_1P_2, (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) *étant les coordonnées normales de ces points est :*

$$\sum x^2[y_1y_2 + z_1z_2 + \cos A(y_1z_2 + z_1y_2)]$$
$$+\sum yz\left[\begin{matrix}2x_1x_2\cos A - \cos B(x_1y_2+y_1x_2) - \cos C(x_1z_2+z_1x_2 \\ - (y_1z_2 + z_1y_2)\end{matrix}\right] = 0.$$

293. — *L'équation tangentielle du cercle des neuf points est :*

$$\sum \frac{(b^2 - c^2)^2}{a} l^2 - \sum 2mn.\frac{\sum a^2b^2 - a^4}{bc} = 0.$$

294. — *L'équation tangentielle du cercle de Brocard est :*

$$\sum a^2(b^2c^2 - a^4)l^2 + \sum bc\,(b^2c^2 + 2a^4)mn = 0.$$

295. — *Soit* M, *un point du plan du triangle,* A_1, B_1, C_1, *les centres de gravité des triangles :* MBC, MCA, MAB; *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent en un point* P *situé sur* GM, *et tel que* GM = 4GP.

296. — *On a*

$$50n(n + 1) + 13 \equiv + (5n + 2)^2 + (5n + 3)^2$$

ce qui montre que si un nombre, terminé par 13, est tel que ses centaines forment un nombre triangulaire, ce nombre est la somme de deux carrés entiers consécutifs :

$$13 = 2^2 + 3^2,$$
$$113 = 7^2 + 8^2,$$
$$313 = 12^2 + 13^2,$$
$$613 = 17^2 + 18^2,$$
$$1013 = 22^2 + 23^2,$$

. . . .

297. — *La somme des carrés de deux nombres impairs consécutifs n'est jamais un carré.*

298. — *On ne saurait trouver :*

3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, *nombres entiers, positifs, en progression arithmétique, et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

299. — *Les quatre seuls nombres impairs consécutifs dont la somme des carrés soit un carré, sont :*

$$(-1)^2 + (+1)^2 + 3^2 + 5^2 = 6^2.$$

300. — *La somme des carrés de quatre entiers positifs, en progression arithmétique, de raison impaire, n'est jamais un carré.*

301. — *Les équations :*

$$3px^2 - 1 = y^2,$$
$$7px^2 - 1 = y^2,$$
$$5px^2 \pm 2 = y^2,$$
$$19px^2 - 30y^2 = z^2,$$

*n'ont pas de solutions en nombres entiers (*p *entier positif).*

CONCOURS DE SAINT-CYR (1893) *

Dans un triangle on donne a, A *et le produit* b (b + c) = K^2. *Déterminer par le calcul* b *et* c. — *Discussion.*

Posons $b = x$ et $c = y$; on doit déterminer les valeurs réelles et positives des variables x et y satisfaisant aux équations

(1) $$x^2 + yx = K^2,$$

(2) $$x^2 + y^2 - 2xy \cos A = a^2.$$

Multiplions la première par a^2, la seconde par K^2, en posant $z = \dfrac{x}{y}$, on a, par soustraction :

(3) $$z^2(a^2 - K^2) + z(a^2 + 2K^2 \cos A) - K^2 = 0.$$

La variable z est évidemment assujettie à être réelle et positive. Ces deux conditions sont suffisantes pour en déduire des valeurs d'x et d'y acceptables ; car, de l'équation (1), on tire : $y^2 = \dfrac{K^2}{z(z+1}$ et par suite : $x = yz$.

(*) Cette solution est de M. l'abbé Reboul, professeur au collège de Belley. Une autre solution, due à M. Harivel, a été publiée dans le numéro de juillet.

Le discriminant, changé de signe, δ de l'équation (3) est :

$$\delta = (a^2 + 2K^2 \cos A)^2 + 4K^2(a^2 - K^2),$$

ou $$\delta' = \left(K^2 + \frac{a^2}{8 \cos^2 \frac{A}{4} \cos \frac{A}{2}}\right)\left(\frac{a^2}{8 \sin^2 \frac{A}{4} \cos \frac{A}{2}} - K^2\right).$$

Discussion. — 1° Supposons $K^2 < a^2$. Les racines de l'équation (3) sont évidemment réelles et de signes contraires. Dans ce cas, le problème ne comporte qu'une solution.

2° Supposons $K^2 > a^2$.

z devant être réel, on doit avoir $\delta' > 0$, c'est-à-dire

$$K^2 < \frac{a^2}{8 \sin^2 \frac{A}{4} \cos \frac{A}{2}}.$$

Ces deux limites sont compatibles, la première étant inférieure à la seconde. On a, en effet :

$$\frac{a^2}{8 \sin^2 \frac{A}{4} \cos \frac{A}{2}} > a^2,$$

cette inégalité se réduisant à :

$$\left(2 \cos \frac{A}{2} - 1\right)^2 > 0.$$

Pour que le problème comporte deux solutions, il faut et il suffit que les racines aient une somme positive; ainsi, on doit avoir :

$$\frac{a^2 + 2K^2 \cos A}{K^2 - a^2} > 0,$$

ou $$K^2 > -\frac{a^2}{2 \cos A};$$

ce qui exige que cette limite de K^2 soit inférieure à la limite supérieure précédente; c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\frac{a^2}{8 \sin^2 \frac{A}{4} \cos \frac{A}{2}} > -\frac{a^2}{2 \cos A},$$

ou, après quelques transformations,

$$\cos \frac{A}{2} > \frac{1}{2},$$

ou $$\cos\frac{A}{2} > \cos 60$$

ou $$A < 120^0.$$

Donc si K^2 varie de a^2 à $\dfrac{a^2}{8\sin^2\frac{A}{4}\cos\frac{A}{2}}$ et si l'angle donné A est inférieur à 120°, il y a 2 solutions, et o solution si on a : $A > 120^0$; car l'hypothèse $A < 120^0$ fait que la limite $-\dfrac{a^2}{2\cos A}$ est plus petite que la limite inférieure a^2.

En effet, si A est aigu, on a évidemment $-\dfrac{a^2}{2\cos A} < a^2$.

Si A est obtus, on a encore :

$$a^2 > -\frac{a^2}{2\cos A},$$

ou $$\cos(180 - A) < \frac{1}{2},$$

ou $$180 - A > 60,$$

ou $$A < 120^0.$$

Résumé de la discussion.

K^2	SOLUTION
∞	o solution
a^2	
$\dfrac{a^2}{8\sin^2\frac{A}{4}\cos\frac{A}{2}}$	$A > 120^0$ o *sol.*
a^2	$A < 120^0$ 2 *sol*s.
o	1 solution.

Remarque. — En éliminant y entre les équations (1) et (2) on arrive à une équation bicarrée du 4e degré. La méthode employée ci-dessus conduit à une équation du 2e degré, dont la discussion est très simple, z étant une variable assujettie à être seulement réelle et positive. On pouvait prévoir ces résultats.

En effet, les équations (1) et (2) représentent deux coniques

concentriques dont les points d'intersection sont symétriques relativement à l'origine. Par suite, z représentant les cotangentes des angles que les deux cordes communes font avec les axes, l'équation en z doit être du 2e degré. De plus, l'une des équations considérées représentant une ellipse réelle, ayant son centre à l'origine, les points communs aux deux coniques seront réels si la corde commune est réelle. Il suffit donc, en résumé, d'exprimer que l'équation en z a ses racines réelles.

BACCALAURÉATS

(NOVEMBRE 1892)

Académie de Lyon.

1re série. — On considère tous les triangles ayant la même base $BC = a$ et même angle opposé A à ce côté, et l'on demande de trouver, parmi tous ces triangles, celui dont l'aire est maxima.

2e série. — Un tronc de cône étant circonscrit à une sphère de rayon inconnu, on donne la surface totale de ce tronc de cône et son volume; on demande de calculer le rayon de la sphère, les rayons des bases du tronc et la longueur de l'arête. Dans quel cas le problème est-il possible?

3e série. — On donne, dans un plan, deux cordes qui sont tangentes extérieurement. Trouver le rayon d'un troisième cercle tangent aux deux premiers, et tel que le triangle dont les sommets sont les centres des trois cercles aient une aire donnée.

ABC étant les angles d'un triangle, démontrer la relation

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos A/2 . \cos B/2 . \cos C/2.$$

Deux forces ont pour valeurs respectives 12 kilogr. et 16 kilogr.; leur résultante vaut 20 kilogr. Trouver l'angle des deux forces.

Trouver entre quelles valeurs il faut faire varier x pour que la fraction $\frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - 5x + 3}$.

Étant donnés un triangle isocèle ABC, qui a pour côtés égaux AB et AC, et un point I sur la base, mener une parallèle PQ à BC, limitée aux côtés égaux et qui soit OM du point I sous un angle droit. On représentera la base BC par ra, la hauteur correspondante par h, et la distance du point au milieu de BC par m.

Discussion.

Académie de Nancy.

I. 1° Établir la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire puisse être exactement convertie en fraction décimale; 2° Etant donné une fraction décimale périodique, trouver la fraction ordinaire génératrice.

II. Calculer le rayon x de la base d'un cône et son arête y, sachant que la surface totale du cône est égale à πa^2, et que la surface du triangle rectangle qui engendre le cône est égale à $2b^2$. Condition de possibilité.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. Expliquer et tracer à main levée l'une des trois épures suivantes
1° Angles de deux plans donnés par leur traces :
2° Angle d'une droite et d'un plan ;
3° Angle de deux droites.
II. Démontrer la formule

$$\left(\cos x - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 2 \sin\frac{h}{2} \sin x.$$

En déduire la somme :

$$S = \sin x + \sin (x + h) + \sin (x + 2h) + \ldots + \sin (x + nh).$$

QUESTION 487.

Solution par C. Grolleau, Répétiteur général au lycée de Marseille.

Si p *est un nombre premier (autre que 2), en posant*

$$\theta_{p,q} = \frac{2^q - 1}{2 - 1} + \frac{3^q - 1}{3 - 1} + \ldots + \frac{(p - 1)^q - 1}{(p - 1) - 1}$$

$\theta_{p,q} + q + 1$ *est un multiple de* p (q *étant un nombre entier inférieur à* $p - 1$). (G. L.)

$\theta_{p,q}$, peut s'écrire, en effectuant les divisions.

$$\begin{aligned}\theta_{p,q} = {} & 2^{q-1} + 2^{q-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^1 + 2^0 \\ & + 3^{q-1}\, 3^{q-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3^1 + 3^0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (p-1)^{q-1} + (p-2)^{q-2} + \ldots + (p-1)^1 + (p-1)^0\end{aligned}$$

ou, en ajoutant q aux deux membres de cette égalité :

$$\begin{aligned}\theta_{p,q} + q = {} & 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (p-1)^0 \\ & + 1^1 + 2^1 + 3^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (p-1)^1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 1^{(q-1)} + 2^{(q-1)} + 3^{(q-1)} + \ldots + (p-1)^{(q-1)}\end{aligned}$$

or, la première ligne étant égale à $(p - 1)$ on a, en ajoutant 1 aux deux membres :

$$\theta_{p,q} + q + 1 = p + S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_{q-1}.$$

Chacune des sommes S_1, S_2 ..... S_{q-1}, étant divisible par p, (Voir Le Besgue « *Introduction à la théorie des nombres*, p. 79 et *J. M. E.* p. 75) la proposition est démontrée.

Note. — MM. E. Foucart, élève au lycée Michelet et Aletrop, de Madrid, nous ont adressé une solution analogue.

QUESTION 500

Solutions et développements par M. Ernest Foucart,
élève au lycée Michelet.

Soit PQRS *un quadrilatère. On suppose que* M, *point de concours des diagonales, partage la diagonale* PR *de manière que*

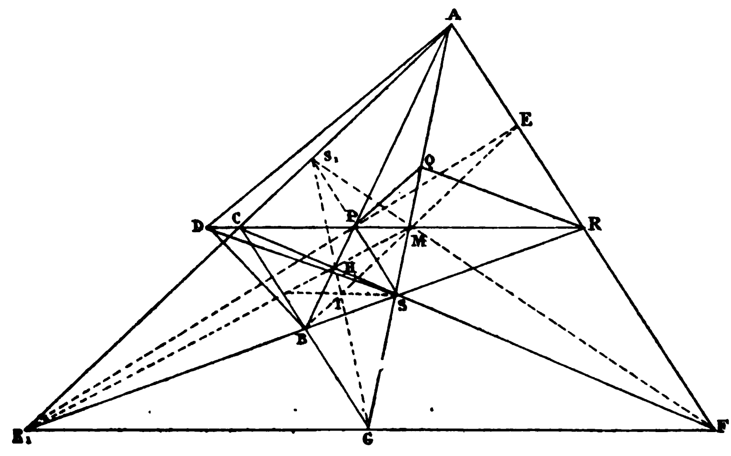
$$MR = 3MP.$$

On prend sur le prolongement de MP *un point* C *tel que*

$$MC = MR,$$

et sur le prolongement de RS *un point* B *tel que* BC *soit parallèle à* SP. *La droite* BP *prolongée coupe* SM *en* A. *On joint* A *à un point* D *de* RP *tel que* AD *soit parallèle à* PQ.

Démontrer que SD *est parallèle à* RQ. (Lucien Lévy.)



Appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle MRS coupé par la transversale APB, on a

$$\frac{AM}{AS} \cdot \frac{BS}{BR} \cdot \frac{PR}{PM} = +1$$

ou, puisque BC est parallèle à PS,

$$\frac{BS}{BR}=\frac{CP}{CR}=\frac{MC-MP}{2MR}=\frac{2MP}{6MP}=\frac{1}{3}.$$

Mais
$$\frac{PR}{PM}=\frac{PM+MR}{PM}=4.$$

Donc
$$\frac{AM}{AS}=\frac{3}{4}$$

ou
$$\frac{MA}{MS}=3.$$

Comme PQ et AD sont parallèles :

$$MA=MQ.\frac{MD}{MP}.$$

L'égalité précédente devient alors

$$\frac{MQ}{MS}=\frac{3MP}{MD}=\frac{MR}{MD}.$$

Les rapports extrêmes étant égaux, SD et RQ sont parallèles.

Notes. — **1°** A la place des deux égalités de l'énoncé on pourrait substituer les suivantes, qui leur sont identiques :

$$MR=3MP,$$
$$CR=3CP.$$

Ceci fait, on peut observer que la proposition reste vraie quand on remplace 3 par un nombre quelconque, simultanément, dans les égalités précédentes, c'est-à-dire si l'on a

$$MR=\lambda MP$$
$$CR=\lambda CP.$$

2° Les droites BC et RA sont parallèles. En effet, on a

$$\frac{RS}{RB}.\frac{MA}{MS}.\frac{PB}{PA}=+1$$

ou
$$\frac{2}{3}.3.\frac{PB}{PA}=+1$$

$$\frac{PA}{PB}=2.$$

Mais
$$\frac{PR}{PC}=2.$$

Donc AR, BC et PS sont parallèles.

3° Les points C, P, M, R formant une division harmonique, le faisceau B(CPMR) est harmonique; et, comme AR est parallèle à l'un des rayons BC, la droite BM coupe AR en son milieu; elle passe aussi par le milieu de PS.

De même le faisceau S(CPMR) est harmonique, AR est parallèle à SP, CS coupe donc AR en un point symétrique de A par rapport à R

Ces propriétés s'appliquent au cas énoncé au n° 1.

4° Appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle AME coupé par la transversale BSR, on a

$$\frac{BM}{BE}.\frac{SA}{SM}.\frac{RE}{RA}=+1,$$

$$\frac{BM}{BE} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = +1,$$
$$BE = 2BM.$$

Donc M est le milieu de BE.

5° E et M étant les milieux de AR et CR, BM et AC sont parallèles, et comme BM = ME, AC coupe BR en un point E_1 tel que

$$BE_1 = BR, \quad E_1C = CA.$$

Si F est le point de rencontre de CS et AR, le point S est le centre de gravité du triangle AE_1F.

6° CB rencontre AS en G. On a

$$BC = BG = AE.$$

Donc GR, BE, AC sont parallèles. Le quadrilatère ACRG est un parallélogramme dont M est le centre.

Les points G, S, M, A forment une division harmonique semblable à la division CMPR, car les droites CH, PC_1 AR sont parallèles. Le faisceau C(GSMA) est harmonique, SP est parallèle à un des rayons de ce faisceau, elle coupe donc CA en un point S_1 symétrique de S par rapport à P ; ce qui résulte encore de ce que BC est parallèle à BC et qu'on a BC = BG.

7° Les faisceaux B(CPMR) et C(GSMA), ont même rapport anharmonique; ils ont un rayon homologue commun CB, donc la droite ME_1 passe par le point de rencontre A de CS et PB.

8° Les points S, H, G sont en ligne droite. On a en effet

$$\frac{SS_1}{CG} = \frac{PS}{CB}.$$

9° Les points E, E, D sont en ligne droite; ceci résulte immédiatement de ce que SS_1 et AR sont parallèles et que P et E sont les milieux respectifs de SS_1 et de AR.

10° Les points S_1, M, F sont en ligne droite. Il suffit de vérifier que

$$\frac{FE}{FA} = \frac{EM}{AS_1},$$

ou

$$\frac{EM}{AS_1} = \frac{3}{4}.$$

Or

$$AS_1 = \frac{AE_1}{3} = \frac{2BE}{3} = \frac{4EM}{3}.$$

Donc

$$\frac{EM}{AS_1} = \frac{3}{4}.$$

11° La droite S_1G coupe BM en I. Ce point I est le centre de gravité du triangle CMG. La droite SI est parallèle à MC et passe par le point de rencontre de ME_1 et de BC.

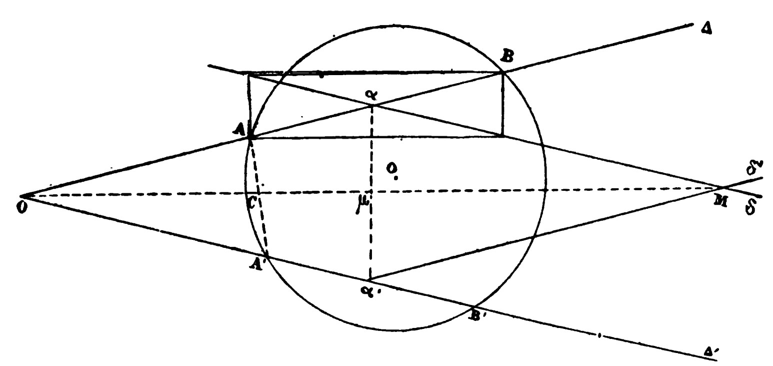
Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny et Grolleau.

QUESTION 490

Solution par M. Droz-Farny.

Sur deux droites Δ, Δ', *on considère deux points fixes* A, A'. *Soient* B, B' *deux points mobiles tels que le quadrilatère* ABA'B' *soit inscriptible à un cercle. Par* A, B *on mène des parallèles aux bissectrices des angles des droites* Δ, Δ'. *La diagonale* S *du rectangle ainsi formé, et celle du rectangle analogue construit avec* A'B', *concourent en un point dont le lieu géométrique est une droite passant par le milieu de* AA'. (G. L.)

1° Comme on le voit immédiatement, S passe par le milieu α de AB parallèlement à Δ. Soit M le point de rencontre de S et S'. La figure OαMα' est un parallélogramme dont les diagonales OM et $\alpha\alpha'$ se coupent en leur point milieu μ. Le centre O de la circonférence ABA'B' décrivant la média-



trice de AA', les points α et α', projections sur Δ et Δ' de O, décrivent deux ponctuelles semblables; et par conséquent $\alpha\alpha'$ enveloppe une parabole tangente à Δ et Δ'. Donc le lieu du point milieu μ de $\alpha\alpha'$ est une droite tangente elle-même à la parabole. Le point M décrit donc une ligne droite parallèle au lieu de μ. Pour la circonférence particulière AA'O, le point M coïncide avec C milieu de AA'. D'où le théorème.

2° *Autrement.* α et α' décrivant deux ponctuelles semblables,

S et S′ engendrent deux faisceaux projectifs ayant respectivement pour centres les points infinis de Δ et Δ′ et admettant la ligne des centres comme rayons correspondants coïncidants. Ces faisceaux sont donc perspectifs et le lieu des points d'intersection des paires de rayons correspondants est donc une ligne droite.

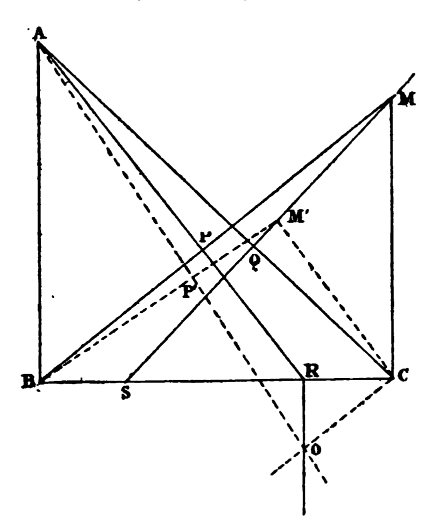
Nota. — M. Foucart nous a adressé une solution analytique.

QUESTION 491

Solution, par M. A. Droz-Farny.

On donne un triangle ABC *rectangle en* B. *On joint les points* B *et* C *à un point quelconque* M *du plan du triangle. De* A, *on abaisse la perpendiculaire* AP *sur* BM; *en* C, *on élève la perpendiculaire* CO *et* CM. *Ces droites se coupent en* O; *on projette ce point orthogonalement en* R, *sur* BC. *La perpendiculaire* MQ *sur* AC *coupe* BC *au point isotomique de* R. (Mannheim.)

Supposons que la droite MQ, qui rencontre BC en S soit fixe et, sur elle, faisons mouvoir le point M. BM et CM décrivent deux faisceaux perspectifs et les droites AP et CO respectivement perpendiculaires sur BM et CM décrivent aussi deux faisceaux projectifs (A) et (C). Si M coïncide avec le point infini de SQ, BM et CM sont parallèles à SQ; par conséquent, les rayons AP et CO coïncident avec AC. Les faisceaux (A) et (C) sont donc perspectifs et le lieu de O est une ligne droite.



Si M coïncide avec S, BM et CM coïncident avec BC

et AP et CO sont perpendiculaires sur BC. Le point ∞ de AB appartient au lieu; autrement dit, le point O décrit une droite perpendiculaire sur BC. On obtient le point R de cette droite en supposant MC perpendiculaire sur BC, car, dans ce cas, CO coïncide avec BC.

On a alors le triangle SCM semblable à ABC;

d'où
$$\frac{SC}{MC} = \frac{AB}{BC}.$$

De même, le triangle ABR semblable à BCM donne
$$\frac{BR}{MC} = \frac{AB}{BC}.$$

Il en résulte
$$BR = SC,$$
ou
$$BS = CR.$$

C. Q. F. D.

QUESTION 492

Solution par Mme Ve F. Prime.

Donner le nombre des chiffres de la suite naturelle des nombres de 1 *jusqu'à* ($10^m - 1$) *inclusivement.* (B. Sollertinsky.)

Comme il y a 9.10^{i-1} nombres de i chiffres, la question revient à évaluer la somme

$$S = 9.\sum_i^m i.10^{i-1},$$

ou
$$10.S = 9.\sum_1^m i.10^i = 9\sum_2^{m+1} (i-1).10^{i-1}.$$

Il en résulte que

$$9.S = 9.m.10^m - 9 - 9\sum_2^m 10^{i-1}$$
$$= 9.m.10^m - 9\sum_1^m 10^{i-1},$$

d'où
$$S = m.10^m - \frac{10^m - 1}{9} = \frac{10^m(9m-1)+1}{9}.$$

Cette quantité, comme ou le voit facilement, est égale à

$$(m - 1)88..89.$$

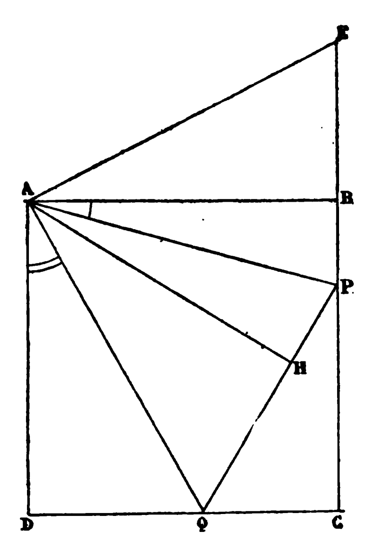
Le premier chiffre est $m - 1$, il est suivi de $m - 1$ chiffres 8 et le dernier chiffre est 9.

Nota. — Solutions diverses par MM. Aletrop, à Madrid; Youssoufian, à Constantinople; Droz-Farny, professeur au collège de Porentruy.

QUESTION 496

Solution par M. Droz-Farny.

On donne un carré ABCD. *Du sommet* A *on mène une droite qui coupe* BC *au point* P *et une droite qui coupe* CD *au point* Q. *L'angle* PAQ *étant toujours égal à* 45°, *démontrer que, quelle que soit sa position, la distance du point* A *à la droite* PQ *est constante.* (Mannheim.)



Prolongeons PB d'une longueur BE = DQ. On aura AC = AQ.

Or

$$\widehat{EAP} = \widehat{BAP} + \widehat{DAQ} = 45^{\circ} = \widehat{PAQ}.$$

Ainsi le triangle EAP est égal au triangle PAQ, et la perpendiculaire abaissée de A sur PQ est égale au côté du carré AB.

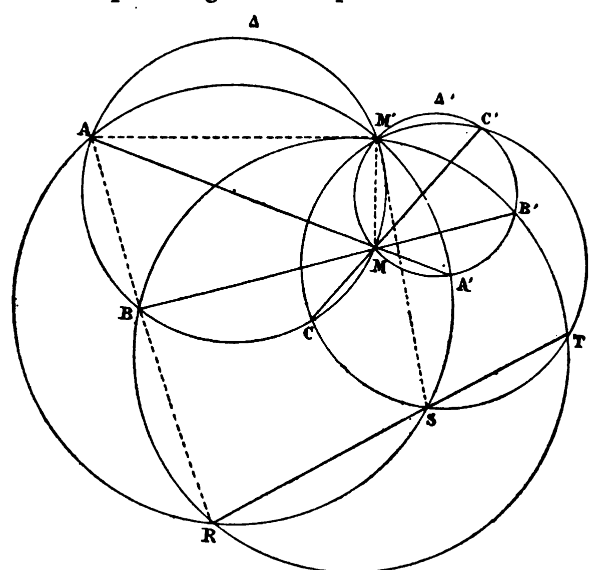
Nota. — M. Foucart, élève au Lycée Michelet, et M. Greenstreet, nous ont adressé une solution trigonométrique de cette équation. Nous avons reçu, également, une solution géométrique de M. Youssoufian, à Constantinople et une autre de Mme Ve Prime, à Bruxelles.

QUESTION 493

Solution par M. ALETROP (à Madrid).

Deux circonférences Δ, Δ' *se coupent aux points* M,M'. *Trois cordes* MA, MB, MC *du cercle* Δ *rencontrent* Δ', *respectivement en* A' B' C'. *Démontrer que les circonférences* AA'M', BB'M', CC'M' *se coupent deux à deux en des points situés sur une droite.* (B. Sollertinsky.)

Soit R le second point d'intersection des circonférences AA'M', BB'M'; les points A,B,R sont en ligne droite. En effet, on sait que l'angle formé par deux cordes telles que



AB, A'B' est constant et égal au supplément de l'angle formé par les cordes qui joignent le point M' aux extrémités d'une sécante quelconque AA'; donc le point d'intersection de AB et AB' se trouvera sur le segment ARA', lieu des points d'où l'on voit sous un angle supplémentaire de $\widehat{AMA'}$ la droite AA'. De même, il se trouve sur le segment BRB[1] ; donc il

coïncide avec l'intersection R de ces deux segments. En d'autres termes. les points A, B, R sont en ligne droite, ainsi que les points A', B', R.

Cela posé, tirons M'S ; on a, dans la circonférence Δ,

$$\widehat{BMM'} = 180^\circ - \widehat{BAM'},$$

et, dans la circonférence AA'M',

$$\widehat{RSM'} = 180^\circ - \widehat{RAM'};$$

donc

$$\widehat{BMM'} = \widehat{RSM'}.$$

Pour des raisons analogues, on a

$$\widehat{B'MM'} = \widehat{TSM'}.$$

Par suite,

$$\widehat{RSM'} + \widehat{TSM'} = \widehat{BMM'} + \widehat{B'MM'} = 180^\circ,$$

ce qui montre que les points R, S, T sont en ligne droite.

Nota. — Solutions diverses par MM. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille ; Droz-Farny, professeur au collège de Porentruy ; Youssoufian, à Constantinople ; Mme Ve F. Prime, à Bruxelles.

QUESTIONS PROPOSÉES JUSQU'EN 1892

ET NON RÉSOLUES EN DÉCEMBRE 1893

SÉRIE	TOME	ANNÉE	NUMÉROS DES QUESTIONS
2	I	1882	7, dont la solution est annoncée comme devant paraître prochainement dans la note, page 288, du tome V, 1886.
2	III	1884	148, 149, 160, 161.
2	IV	1885	184, 199.
3	I	1887	240, 241, 242, 248, 257.
3	II	1888	278, 279, 283, 284.
3	III	1889	337, 345.
3	IV	1890	359, 360.
3	V	1891	382, 387, 389, 393, 394, 408, 421, 422.
4	I	1892	424, 441, 442, 464, 465, 469.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20. PARIS. — 24636-11-93.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Arithmétique et Algèbre.

Géométrie.

Baccalauréat.

Concours divers.

Mélanges et Correspondances.

Bibliographie.

Questions proposées.

471 à 530.

Questions résolues.

423, 365, 378, 390, 421, 440, 431, 432, 433, 434, 436, 365, 435, 437, 448, 443, 478, 348, 452, 438, 451, 453, 454, 388, 444, 446, 447, 458, 450, 455, 459, 456, 457, 460, 445, 462, 463, 468, 346, 454, 449, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 479, 477, 480, 481, 484, 485, 486, 487, 500, 490, 491, 492, 493, 496.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24636-11-93.